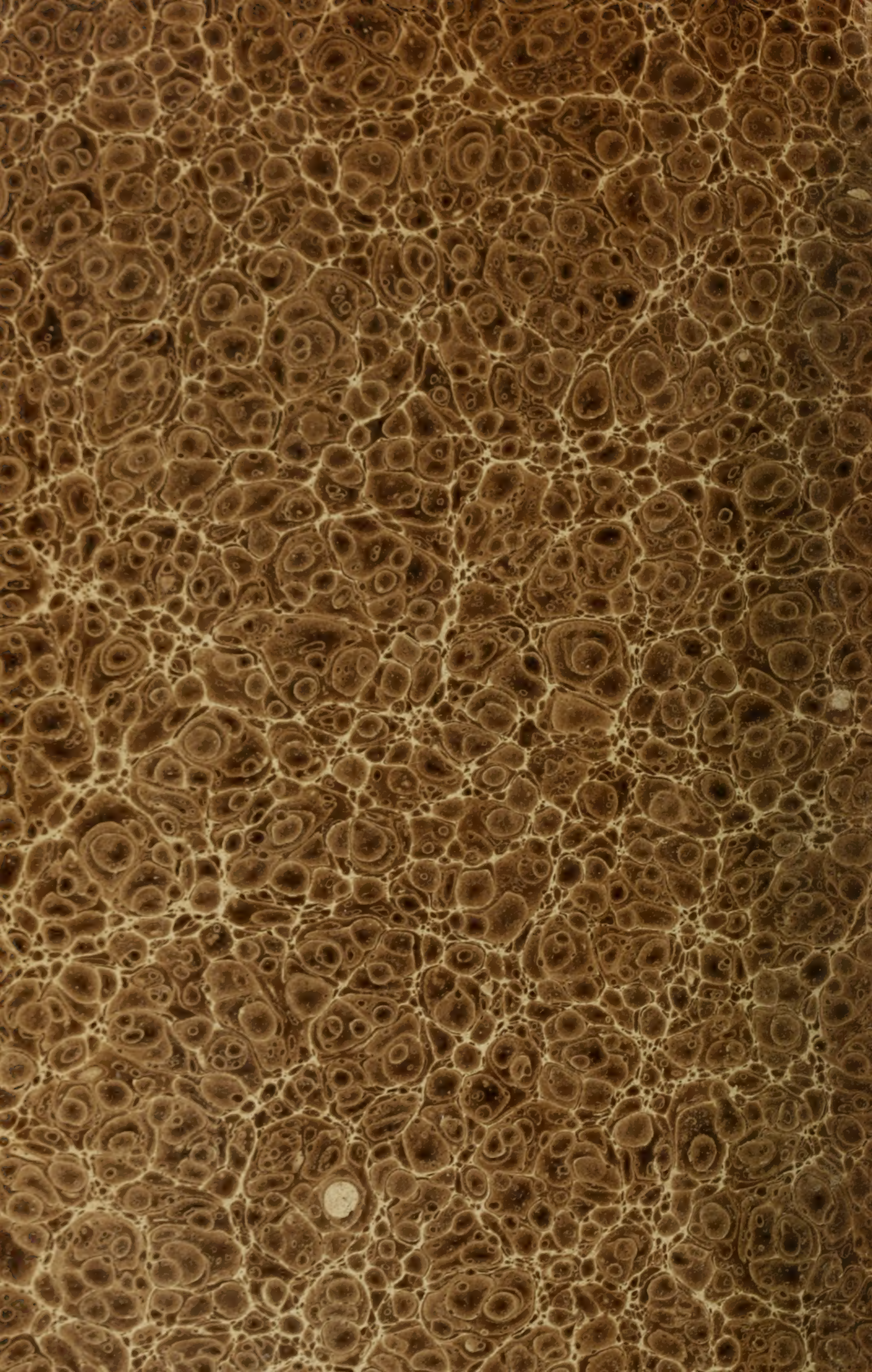

UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 01289253 5





INTRODUCTION GÉOMÉTRIQUE

A

QUELQUES THÉORIES PHYSIQUES.

DU MÊME AUTEUR.

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS :

Leçons sur la théorie des fonctions (*Éléments de la théorie des ensembles et applications*) . . . . 3 fr. 50
Leçons sur les fonctions entières . . . . 3 fr. 50
Leçons sur les séries divergentes . . . . 4 fr. 50
Leçons sur les séries à termes positifs, *rédigées par R. d'Adhémar* . 3 fr. 50
Leçons sur les fonctions méromorphes, *rédigées par L. Zoretti* . . . 3 fr. 50
Leçons sur les fonctions de variables réelles et les séries de polynomes, *rédigées par M. Fréchet*, avec des Notes par PAUL PAINLEVÉ et HENRI LEBESGUE . . . . 4 fr. 50
Leçons sur la théorie de la croissance, *rédigées par A. Denjoy* . . . . 4 fr. 50
Leçons sur les fonctions monogènes uniformes d'une variable complexe. (*Sous presse.*)

LIBRAIRIE HERMANN ET FILS :

Éléments de la théorie des probabilités, 2e édition ; 1910 . . . . 6 fr.

LIBRAIRIE FÉLIX ALCAN :

L'Aviation (*en collaboration avec* PAUL PAINLEVÉ *et* CH. MAURAIN), 6e édition revue . . . . 3 fr. 50.
Le Hasard . . . . 3 fr. 50.

LIBRAIRIE VUIBERT :

Introduction à la théorie des nombres et à l'Algèbre supérieure (*en collaboration avec* JULES DRACH) . . . . 10 fr.

ÉMILE BOREL,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

INTRODUCTION GÉOMÉTRIQUE

A

QUELQUES THÉORIES PHYSIQUES.



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1914

PRÉFACE.

La Science mathématique tout entière doit son origine et la plupart de ses progrès à l'observation et à l'expérience; cette origine ne doit pas être méconnue; séparer par un fossé les Mathématiques et la réalité est une grave erreur pédagogique, dont il semble qu'on soit insuffisamment revenu dans notre enseignement secondaire, malgré les efforts des inspirateurs des programmes de 1902. Il ne faut pas cependant oublier que le but propre de la discipline mathématique est d'abstraire les éléments communs aux réalités diverses, de manière à créer des théories dont le champ d'application soit aussi large que possible; ce point de vue ne s'oppose pas au précédent, mais au contraire le complète. Ce serait en effet une grave erreur d'apprendre aux enfants la table de multiplication sans leur en faire faire aussitôt des applications concrètes; mais ce serait une erreur tout aussi grave de ne pas leur apprendre que 3 fois 4 font 12, sous le prétexte que c'est là une formule purement abstraite, vide de toute réalité. En fait, l'enfant qui sait que 3 fois 4 font 12 et qui sait utiliser ce résultat dans des problèmes simples, est bien plus instruit que celui qui aurait remarqué que 3 arbres chargés chacun de 4 fruits portent en tout 12 fruits, mais qui ne saurait pas transposer ce fait en un autre domaine.

Cette méthode propre des Mathématiques, qui consiste à épurer les formules, à les débarrasser de leur contenu concret particulier, afin de les rendre applicables à d'autres questions concrètes, ne s'est montrée nulle part plus féconde qu'en Physique. Si l'on avait le loisir de retracer l'histoire des Mathématiques et de la Physique depuis un siècle et demi, on apercevrait leur constante réaction mutuelle : une théorie mathématique, dont l'origine est physique, est développée d'une manière purement abstraite par les mathématiciens et ces développements sont à leur tour utilisés par les physiciens.

Les progrès exceptionnellement rapides des théories physiques depuis vingt ans, n'ont guère eu le temps de réagir sur les Mathématiques pures. On est allé au plus pressé, c'est-à-dire qu'on s'est limité aux développements mathématiques dont l'utilité physique était immédiate. Pour un physicien expérimental, un travail théorique n'a d'intérêt que s'il fournit l'idée d'une expérience. Le point de vue du mathématicien est nécessairement différent; il est tout aussi légitime. Épurer les concepts mathématiques qui sont suggérés par les théories physiques nouvelles, les vider de leur contenu physique pour les étudier en eux-mêmes, voilà la tâche propre du mathématicien. Il travaille ainsi à fournir au physicien des instruments de travail adéquats à ses besoins futurs, instruments qui souvent ont duré plus longtemps que les théories physiques dont ils étaient issus. Les recherches mathématiques sur l'équation de Laplace restent utiles au physicien qui a renoncé à l'électrostatique de Coulomb. La théorie mathématique des phénomènes périodiques subsiste, même si les explications mécaniques des phénomènes lumineux sont abandonnées.

Ce petit Livre est une très modeste contribution à cette

tâche qui s'impose aux mathématiciens; je serais pleinement satisfait, s'il pouvait inciter quelques jeunes gens à s'intéresser à la Physique mathématique, qui ne doit pas être confondue avec la Physique théorique, et à s'intéresser aussi aux questions de Mathématiques pures qui se rattachent à la Physique mathématique.

La première Partie de l'Ouvrage, rédigée par M. Deltheil, élève de l'École Normale supérieure, d'après quelques leçons que j'ai faites à la Sorbonne en décembre 1912 et janvier 1913, est l'exposé très élémentaire des théories de géométrie à 4 dimensions et à n dimensions (n très grand) qui se rattachent à la théorie de la relativité et à la mécanique statistique. Accessibles à un bon élève de mathématiques spéciales, ces théories géométriques méritent d'être étudiées en elles-mêmes et pourraient se développer beaucoup, indépendamment de leur interprétation physique. J'adresse tous mes remercîments à M. Deltheil pour le soin qu'il a apporté à sa rédaction.

La seconde Partie consiste en sept Notes, dont la plupart ont déjà été publiées dans divers Recueils et qui sont toutes inspirées par les idées que j'ai essayé de résumer dans cette Préface. Ces idées même, avec quelques autres qui s'y rattachent, sont développées dans la dernière des Notes : *Les Théories moléculaires et les Mathématiques*, reproduction d'une conférence [1] faite à l'inauguration de l'*Institut Rice* à Houston (Texas) en octobre 1912.

Saint-Paul-des-Fonts (Aveyron), le 10 octobre 1913.

---

[1] Le texte français de cette conférence a été publié dans la *Revue générale des Sciences* du 30 novembre 1912 et une traduction anglaise, faite par les soins de la *Smithsonian Institution* de Washington, a paru dans le *Report* de cette Institution pour 1912.

INTRODUCTION GÉOMÉTRIQUE

À

QUELQUES THÉORIES PHYSIQUES.

CHAPITRE I.

LES DÉPLACEMENTS DE LA GÉOMÉTRIE ORDINAIRE.

La Géométrie ordinaire à deux dimensions consiste essentiellement en l'étude du groupe des déplacements des figures planes. Ces déplacements sont de deux sortes : les uns peuvent être réalisés par un glissement continu de la figure dans son plan ; les autres, au contraire, nécessitent un retournement de la figure déplacée ; et tout déplacement de la deuxième catégorie peut, d'une infinité de manières, être obtenu en effectuant une symétrie par rapport à une droite suivie d'un déplacement de la première catégorie.

Nous n'étudierons ici que ces derniers. Deux d'entre eux jouent, en Géométrie, un rôle fondamental : ce sont la translation et la rotation.

Translation. — Étant donné un plan rapporté à deux axes de coordonnées à tout point M de coordonnées x, y, la translation (T) définie par les nombres

$$a, \quad b$$

fait correspondre le point M' de coordonnées

$$x' = a + x,$$
$$y' = b + y.$$

L'opération (T) laisse immobiles, quels que soient a et b, tous

les points à l'infini du plan, et ces points sont les seuls qu'elle laisse immobiles.

Deux translations successives, définies par les nombres a, b; a', b' équivalent à la translation unique, définie par les nombres $a + a'$, $b + b'$; en d'autres termes, dans le groupe des déplacements de la première catégorie, les translations forment un sous-groupe.

Rotation. — Une rotation laisse invariable un seul point à distance finie, le centre de rotation. Prenons deux axes de coordonnées rectangulaires issus de ce point : si φ est l'angle de la rotation, à tout point M de coordonnées x, y elle fait correspondre le point M' de coordonnées

$$(1)\quad \begin{cases} x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi, \\ y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi. \end{cases}$$

On démontre, et nous n'avons pas à revenir ici sur ce point, que tout déplacement plan se ramène à une rotation ou, exceptionnellement, à une translation.

Droites isotropes. — Cherchons s'il existe une droite issue du centre O de la rotation définie par les formules (1) et que cette opération laisse invariable.

On a, entre le coefficient angulaire m d'une droite OΔ quelconque, et le coefficient angulaire m' de sa transformée, la relation

$$m' = \frac{\operatorname{tang}\varphi + m}{1 - m\operatorname{tang}\varphi}$$

qui résulte immédiatement des formules (1). Si donc nous voulons que $m' = m$, il faut que

$$\operatorname{tang}\varphi(1 + m^2) = 0$$

et, en supposant que l'angle de rotation n'est pas multiple de π, nous voyons qu'il reste

$$m^2 + 1 = 0.$$

Toute rotation plane autour du point O laisse donc invariables deux droites imaginaires issues de ce point. Ces droites sont les mêmes quel que soit l'angle φ de la rotation considérée : elles sont

appelées les droites isotropes du point O ; et l'on appelle points cycliques les points à l'infini I et J communs aux droites isotropes de tous les points du plan.

Autre forme des équations d'une rotation. — La considération des droites isotropes OI, OJ, d'équations

$$x + iy = 0,$$
$$x - iy = 0$$

nous conduit à transformer les équations (1) de manière à introduire les expressions $x + iy$, $x - iy$.

On peut écrire, en effet,

$$x' + iy' = (\cos\varphi + i\sin\varphi)(x + iy),$$
$$x' - iy' = (\cos\varphi - i\sin\varphi)(x - iy),$$

et, en introduisant les coefficients angulaires m, m', nous avons la relation

$$(2) \qquad \frac{m' - i}{m' + i} = e^{2i\varphi}\,\frac{m - i}{m + i},$$

qui est, en somme, de la forme

$$\frac{F(m')}{F(m)} = e^{2i\varphi},$$

et d'où l'on peut déduire de nombreuses conséquences en ce qui concerne la composition des rotations de centre O.

Groupe des rotations de même centre. — Si à la droite OM', de coefficient angulaire m', qui résulte de la droite OM par une rotation d'angle φ, on fait subir une nouvelle rotation d'angle ψ, son coefficient angulaire deviendra m'' tel que

$$\frac{F(m'')}{F(m')} = e^{2i\psi},$$

et il en résulte que

$$(3) \qquad \frac{F(m'')}{F(m)} = e^{2i(\varphi + \psi)};$$

et, par conséquent, deux rotations successives d'angles φ et ψ et de centre O équivalent à une rotation unique de même centre, et d'un angle égal à $\varphi + \psi$. C'est là un fait que, géométriquement, on

peut considérer comme évident, mais qu'il n'était pas superflu de rendre aussi intuitif sous forme analytique.

Soit le groupe (G) constitué par les *puissances successives* d'une même rotation R

$$1, \quad R, \quad R^2, \quad \ldots, \quad R^m,$$

le symbole 1 représentant l'opération identique, et les symboles R, R^2, ..., R^m représentant des rotations d'angles φ, 2φ, ..., $m\varphi$.

Si φ est commensurable avec 2π, il arrivera, pour des valeurs convenables de m, que la rotation R^m sera géométriquement équivalente à l'opération unité : cela résulte des propriétés de périodicité de l'exponentielle imaginaire qui figure dans la formule (2) : de cette remarque on peut déduire la théorie des polygones réguliers convexes et étoilés.

Si, au contraire, φ n'est pas commensurable avec 2π, la suite

$$1, R, R_2, \ldots, R^m$$

ne se *fermera* jamais. Mais, dans ce cas, on pourra rendre l'opération R^m aussi peu différente que l'on voudra d'une rotation quelconque donnée à l'avance : on dit, dans la théorie des groupes, que le groupe (G) n'admet pas de *domaine fondamental*. Ces remarques tirent ici leur utilité principale du fait que nous aurons plus loin l'occasion d'étudier des groupes analogues de rotations hyperboliques admettant un domaine fondamental.

Détermination des points du plan laissés invariables par un déplacement donné. — Il résulte d'un théorème fondamental rappelé plus haut que le déplacement le plus général du plan est défini, en coordonnées homogènes, par les formules

$$(3) \quad \begin{cases} x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi + 2x_0 z, \\ y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi + 2y_0 z, \\ z' = z. \end{cases}$$

Cherchons s'il existe un point M coïncidant avec son homologue M'. Soient x, y, z les coordonnées d'un tel point : on doit avoir

$$(4) \quad \frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} = \frac{z'}{z}.$$

Désignons par ρ la valeur commune des rapports (4) ; les inconnues x, y, z sont données par le système linéaire

$$\begin{aligned} (\cos\varphi - \rho)x - y\sin\varphi + x_1 z &= 0, \\ \sin\varphi\, x + (\cos\varphi - \rho)y + y_1 z &= 0, \\ (1-\rho)z &= 0 \end{aligned}$$

dont le déterminant Δ s'écrit

$$(1-\rho)(\rho^2 - 2\rho\cos\varphi + 1),$$

de sorte que l'équation $\Delta = 0$ admet pour racines $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = e^{i\varphi}$, $\rho_3 = e^{-i\varphi}$. Nous voyons alors qu'à la racine $\rho_1 = 1$ correspond un point unique à distance finie, si φ n'est pas nul, et tous les points de la droite de l'infini si φ est nul ; ce dernier cas est celui où le déplacement considéré se réduit à une translation.

Quant aux racines ρ_2 et ρ_3, il leur correspond les points

$$\begin{aligned} z &= 0, \\ x \pm iy &= 0 \end{aligned}$$

qui sont les points cycliques I et J du plan.

La géométrie euclidienne plane au point de vue projectif. — Le déplacement euclidien général défini par les formules (3) est une transformation projective dont deux des points doubles sont les points cycliques I et J. Ce n'est d'ailleurs pas la transformation projective la plus générale satisfaisant à cette condition : un calcul simple montre, en effet, que ces transformations sont toutes les similitudes du plan.

Mais le déplacement (3), puisqu'il fait partie de cette classe d'homographies, en possède bien toutes les propriétés ; par exemple, si nous prenons deux droites $A\Delta_1$, $A\Delta_2$, auxquelles il fait correspondre les droites $A'\Delta_1'$ et $A'\Delta_2'$, nous pouvons écrire l'égalité des rapports anharmoniques

$$(5) \qquad (A\Delta_1, A\Delta_2, AI, AJ) = (A'\Delta_1', A'\Delta_2', A'I, A'J).$$

Cette formule (5) n'exprime pas autre chose que la conservation de l'angle de deux droites par un déplacement quelconque du plan. Si, en effet, m_1, m_2 sont les coefficients angulaires des droites Δ_1 et Δ_2, il résulte de la formule (2) que leur angle V est donné par

la formule

$$\frac{m_1 - i}{m_1 + i} = e^{2iV} \frac{m_2 - i}{m_2 + i}$$

qui s'écrit ainsi :

(6) $$V = \frac{1}{2i} \operatorname{Log}(A\Delta_1, A\Delta_2, AI, AJ).$$

Cette formule célèbre, due à Laguerre, montre qu'il est possible de définir les angles en les rapportant à la figure constituée par les deux points cycliques I et J : les distances, elles aussi, sont susceptibles d'une pareille définition : sans y insister, observons que les cercles peuvent être définis comme les coniques passant par les points I et J ; le centre est le pôle de la droite IJ ; ces remarques suffisent pour que l'on puisse mesurer toutes les distances, une fois donnée un segment linéaire pris comme unité de longueur.

En résumé, dans la géométrie euclidienne plane, il y a une droite qui jouit de propriétés très particulières, c'est la droite de l'infini : sur cette droite, deux points imaginaires, les points cycliques, jouent un rôle très spécial. Nous étudierons par la suite une géométrie plane, non euclidienne, dans laquelle nous définirons les distances et les angles, non plus par rapport aux points cycliques, mais par rapport à deux points *réels* de la droite de l'infini.

ÉTUDE ANALYTIQUE DES DÉPLACEMENTS DE LA GÉOMÉTRIE EUCLIDIENNE A TROIS DIMENSIONS.

L'intuition et le raisonnement géométriques peuvent suffire pour l'étude des géométries euclidiennes à deux et à trois dimensions, qui représentent les faits du monde physique où nous vivons. Mais, lorsqu'on se propose l'étude d'une géométrie à un nombre de dimensions dépassant trois, si l'emploi systématique du langage géométrique peut rendre d'appréciables services, il est néanmoins indispensable de donner aux raisonnements une base purement analytique.

En vue de faciliter l'introduction des géométries métriques générales dont nous aurons à nous occuper par la suite, nous allons appliquer cette méthode analytique, dont nous pourrions ici aisément nous passer, à l'étude des déplacements de la géométrie ordinaire de l'espace.

Définitions. — Nous appellerons point (x) l'ensemble des trois nombres

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3$$

qui sont les coordonnées du point (x). La distance d de deux points (x) (y) est définie par la relation fondamentale

$$d^2 = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2.$$

La géométrie à trois dimensions consiste essentiellement en la détermination et l'étude des transformations (T) du type

$$(7) \qquad \begin{cases} x_1 = f_1(X_1, X_2, X_3), \\ x_2 = f_2(X_1, X_2, X_3), \\ x_3 = f_3(X_1, X_2, X_3), \end{cases}$$

telles que si (x), (y) et (X), (Y) sont deux couples de points homologues, on ait

$$(8) \qquad \Sigma(x_1 - y_1)^2 = \Sigma(X_1 - Y_1)^2.$$

Nous nous occuperons surtout du premier de ces problèmes : la détermination de toutes les fonctions f_1, f_2, f_3. Nous ferons sur ces fonctions inconnues l'hypothèse qu'elles sont continues et pourvues de dérivées des deux premiers ordres. Dans ces conditions, il va nous être facile de trouver leur expression générale.

Expression générale des fonctions f_1, f_2, f_3. — Supposons, en effet, Y_1, Y_2, Y_3 très voisins de X_1, X_2, X_3, et tels qu'on ait

$$(9) \qquad \begin{cases} Y_1 = X_1 + dX_1, \\ Y_2 = X_2 + dX_2, \\ Y_3 = X_3 + dX_3; \end{cases}$$

il en résultera que

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + dx_1, \\ y_2 &= x_2 + dx_2, \\ y_3 &= x_3 + dx_3 \end{aligned}$$

avec

$$(10) \qquad \begin{cases} dx_1 = a\,dX_1 + b\,dX_2 + c\,dX_3, \\ dx_2 = a'\,dX_1 + b'\,dX_2 + c'\,dX_3, \\ dx_3 = a''\,dX_1 + b''\,dX_2 + c''\,dX_3. \end{cases}$$

où les éléments du déterminant

$$(11)\qquad \Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

sont les neuf dérivées partielles telles que $\dfrac{\partial f_1}{\partial X_1}$, etc.

Cela posé, les éléments du déterminant (Δ) vérifient des relations de deux espèces. Tout d'abord, des conditions d'intégrabilité telles que

$$(13)\qquad \frac{\partial a}{\partial X_2} = \frac{\partial b}{\partial X_1}$$

qui sont au nombre de neuf. Ensuite des relations exprimant que l'équation (8) est vérifiée; et elle s'écrit ici

$$([illegible])\qquad dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = dX_1^2 + dX_2^2 + dX_3^2.$$

Ces relations sont les suivantes :

$$(14)\qquad \begin{cases} a^2 + a'^2 + a''^2 = 1, \\ b^2 + b'^2 + b''^2 = 1, \\ c^2 + c'^2 + c''^2 = 1, \end{cases}$$

et

$$(15)\qquad \begin{cases} ab + a'b' + a''b'' = 0, \\ ac + a'c' + a''c'' = 0, \\ bc + b'c' + b''c'' = 0. \end{cases}$$

Nous allons démontrer que *tous les éléments du déterminant* (Δ) *sont des constantes* : ou, ce qui revient au même, que leurs dérivées par rapport aux variables X_1, X_2, X_3 sont toutes nulles. Ces dérivées sont au nombre de 27.

Dérivons, par rapport à la variable X_1, la première équation (14) et les deux premières équations (15) : tenant compte des conditions d'intégrabilité (13) nous pouvons écrire :

$$(16)\qquad \begin{cases} a\dfrac{\partial a}{\partial X_1} + a'\dfrac{\partial a'}{\partial X_1} + a''\dfrac{\partial a''}{\partial X_1} = 0, \\ b\dfrac{\partial a}{\partial X_1} + b'\dfrac{\partial a'}{\partial X_1} + b''\dfrac{\partial a''}{\partial X_1} = 0, \\ c\dfrac{\partial a}{\partial X_1} + c'\dfrac{\partial a'}{\partial X_1} + c''\dfrac{\partial a''}{\partial X_1} = 0, \end{cases}$$

système linéaire qui n'admet que la solution

$$\frac{\partial a}{\partial X_1} = \frac{\partial a'}{\partial X_1} = \frac{\partial a''}{\partial X_1} = 0,$$

car le déterminant du système n'est autre que le déterminant (Δ), qui a son carré égal à 1 en vertu des équations (14) et (15).

Un calcul tout pareil montrerait que

$$\frac{\partial b}{\partial X_2} = \frac{\partial b'}{\partial X_2} = \frac{\partial b''}{\partial X_2} = 0$$

et

$$\frac{\partial c}{\partial X_3} = \frac{\partial c'}{\partial X_3} = \frac{\partial c''}{\partial X_3} = 0.$$

Il reste encore 18 dérivées telles que $\frac{\partial a}{\partial X_2}$ ou $\frac{\partial^2 x_1}{\partial X_1 \partial X_2}$, les deux indices de dérivation étant différents : ici le calcul est un peu plus compliqué. Soit, par exemple, à démontrer que

$$(17) \qquad \frac{\partial a}{\partial X_2} = \frac{\partial a'}{\partial X_2} = \frac{\partial a''}{\partial X_2} = 0.$$

La dérivation des deux premières relations (14), respectivement par rapport aux variables X_2 et X_1, permet d'écrire en tenant compte des équations d'intégrabilité (12)

$$(18) \qquad \begin{cases} a\dfrac{\partial a}{\partial X_2} + a'\dfrac{\partial a'}{\partial X_2} + a''\dfrac{\partial a''}{\partial X_2} = 0, \\ b\dfrac{\partial a}{\partial X_2} + b'\dfrac{\partial a'}{\partial X_2} + b''\dfrac{\partial a''}{\partial X_2} = 0, \end{cases}$$

équations auxquelles il convient d'adjoindre la suivante :

$$(18\ bis) \qquad c\frac{\partial a}{\partial X_2} + c'\frac{\partial a'}{\partial X_2} + c''\frac{\partial a''}{\partial X_2} = 0,$$

dont nous allons démontrer l'exactitude.

Il existe, en effet, six expressions telles que le premier membre de l'équation (18 *bis*). Elles sont deux à deux égales et de signes contraires, comme on le voit en dérivant les équations (15) :

nous pouvons poser

$$(19)\quad \begin{cases} p = \sum b\,\dfrac{dc}{dX_3} = -\sum c\,\dfrac{db}{dX_1}, \\[2ex] q = \sum c\,\dfrac{da}{dX_3} = -\sum a\,\dfrac{dc}{dX_2}, \\[2ex] r = \sum a\,\dfrac{db}{dX_1} = -\sum b\,\dfrac{da}{dX_3}. \end{cases}$$

Si l'on compare la première expression de p avec la seconde expression de r, les conditions d'intégrabilité de la forme $\dfrac{dc}{dX_1} = \dfrac{da}{dX_3}$, entraînent :

$$p + r = 0.$$

On obtient de même les relations

$$p + q = 0,$$
$$q + r = 0$$

qui montrent que l'on a bien

$$p = 0, \qquad q = 0, \qquad r = 0.$$

La démonstration est évidemment terminée, car les équations (18) et (18 *bis*) entraînent bien les relations (17) et l'on démontre de même les équations analogues; les neuf quantités a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'' sont donc des constantes et l'intégration des relations (10) donne les formules de transformation de coordonnées; c'est là la forme la plus générale des fonctions f_1, f_2, f_3.

Les neuf cosinus. — Les éléments du Tableau (Δ) sont quelquefois appelés les *neuf cosinus de la transformation* (T). Ils vérifient les six relations indépendantes (14) et (15) d'où résultent des formules telles que

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = \pm 1, \qquad a = \Delta(b'c'' - c'b''), \quad \ldots .$$

Nous n'étudierons que les déplacements pouvant se ramener,

par variation continue des cosinus, à l'opération identique

$$(30)\qquad \begin{cases} x_1 = X_1, \\ x_2 = X_2, \\ x_3 = X_3, \end{cases}$$

c'est-à-dire que nous exclurons les opérations (T) à déterminant (Δ) négatif. Les transformations qui restent sont représentées par les formules générales, à déterminant égal à +1,

$$(31)\qquad \begin{cases} x_1 = \alpha_1 + a\,X_1 + b\,X_2 + c\,X_3, \\ x_2 = \alpha_2 + a'\,X_1 + b'\,X_2 + c'\,X_3, \\ x_3 = \alpha_3 + a''\,X_1 + b''\,X_2 + c''\,X_3. \end{cases}$$

Un calcul facile montre que ces transformations forment un groupe : ce fait était d'ailleurs à prévoir, étant donnée la définition des transformations (T).

Formules d'Olinde Rodrigues. — Les neuf cosinus, vérifiant les six relations distinctes (14) et (15), ne dépendent donc que de trois paramètres : il existe des formules les exprimant effectivement en fonction de trois paramètres : on utilise, par exemple, en Mécanique, les expressions en fonction des angles d'Euler, qu'il est inutile de transcrire ici.

Les formules suivantes, dues à Olinde Rodrigues, sont plus avantageuses pour les applications géométriques, parce qu'elles sont rationnelles :

$$(32)\qquad \begin{cases} \delta a = 1 + \lambda^2 - \mu^2 - \nu^2, & \delta b = 2(\lambda\mu - \nu), & \delta c = 2(\lambda\nu + \mu), \\ \delta a' = 2(\lambda\mu + \nu), & \delta b' = 1 - \lambda^2 + \mu^2 - \nu^2, & \delta c' = 2(\mu\nu - \lambda), \\ \delta a'' = 2(\lambda\nu - \mu), & \delta b'' = 2(\mu\nu + \lambda), & \delta c'' = 1 - \lambda^2 - \mu^2 + \nu^2, \\ \text{avec} & & \\ \delta = 1 + \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2. & & \end{cases}$$

Les paramètres λ, μ, ν ont une signification géométrique sur laquelle nous ne reviendrons pas : ils s'expriment d'ailleurs très facilement en fonction des angles d'Euler.

Invariance des angles. — Les déplacements (29), obtenus en partant de l'invariance des distances, assurent l'invariance d'une autre fonction simple relative à trois points $M(x)$, $P(y)$, $Q(z)$.

La distance $\mathrm{PM} = \sqrt{\Sigma(x_i - y_i)^2}$ est un invariant. Or, on peut évidemment écrire

$$(23)\qquad \begin{aligned}\overline{\mathrm{PM}}^2 &= \Sigma[(x_i - z_i) - (y_i - z_i)]^2 \\ &= \overline{\mathrm{MQ}}^2 + \overline{\mathrm{PQ}}^2 - 2\Sigma(x_i - z_i)(y_i - z_i).\end{aligned}$$

Si l'on pose

$$2\Sigma(x_i - z_i)(y_i - z_i) = 2\,\mathrm{QM}\,\mathrm{QP}\cos\widehat{\mathrm{MQP}},$$

on peut définir ainsi l'angle MQP, et il résulte de la formule (23) que cet angle est un invariant des transformations (T). L'invariance des angles résulte donc nécessairement de l'invariance des distances.

Translations. — Parmi les déplacements représentés par les formules générales (21) figurent les translations

$$(24)\qquad \left\{\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 + X_1, \\ x_2 &= \alpha_2 + X_2, \\ x_3 &= \alpha_3 + X_3. \end{aligned}\right.$$

Une translation ne laisse invariable aucun point à distance finie : elle laisse, au contraire, invariable chaque point du plan de l'infini. Deux translations successives équivalent à une translation.

Rotation autour d'un axe. — Le déplacement général (21) ne laisse, en général, invariable aucun point à distance finie. Si, en effet, on avait

$$x_1 = X_1, \qquad x_2 = X_2, \qquad x_3 = X_3,$$

les coordonnées X_1, X_2, X_3 seraient données par le système linéaire

$$(25)\qquad \left\{\begin{aligned} (a-1)X_1 + bX_2 + cX_3 + \alpha_1 &= 0, \\ a'X_1 + (b'-1)X_2 + c'X_3 + \alpha_2 &= 0, \\ a''X_1 + b''X_2 + (c''-1)X_3 + \alpha_3 &= 0, \end{aligned}\right.$$

dont le déterminant

$$\delta = \begin{vmatrix} a-1 & b & c \\ a' & b'-1 & c' \\ a'' & b'' & c''-1 \end{vmatrix}$$

est nul, en vertu de relations telles que $a = b'c'' - c'b''$. Nous obtenons là un résultat contraire à celui obtenu en géométrie plane. Nous verrons plus loin qu'il y a, en général, un point fixe en géométrie à quatre dimensions : de sorte que l'existence du point invariable dépend de la parité du nombre des dimensions.

Faisons d'abord une translation (24) amenant le point O, origine des coordonnées, en son homologue O' dans le déplacement (21). Le déplacement (D) restant aura un point fixe, l'origine O'. Le système linéaire (25) admettra la solution zéro. Mais δ étant nul, ce système admettra une infinité de solutions, non nulles, et correspondant à tous les points d'une droite issue de O'.

S'il y a un point invariable, il y en a donc une infinité en ligne droite.

Cherchons maintenant s'il existe une droite O'Δ, issue de O', et qui reste invariable par le déplacement (D) : si x_1, x_2, x_3 sont les coordonnées d'un point de cette droite, on aura

$$\frac{x_1}{X_1} = \frac{x_2}{X_2} = \frac{x_3}{X_3}.$$

Soit ρ la valeur commune de ces rapports. Les quantités X_1, X_2, X_3 sont données par le système linéaire

$$(26) \quad \left\{ \begin{array}{l} (a - \rho)X_1 + bX_2 + cX_3 = 0, \\ a'X_1 + (b' - \rho)X_2 + c'X_3 = 0, \\ a''X_1 + b''X_2 + (c'' - \rho)X_3 = 0, \end{array} \right.$$

dont le déterminant s'écrit

$$D = 1 - \rho^3 + (\rho^2 - \rho)(a + b' + c'').$$

L'équation $D = 0$ admet la racine $\rho = 1$. La droite correspondante a donc ses points invariables individuellement : elle est réelle, nous l'avons déjà rencontrée plus haut.

La racine $\rho = 1$ étant exclue, il reste

$$\rho^2 - \rho(a + b' + c'' - 1) + 1 = 0,$$

équation qui n'a pas de racines réelles, ainsi qu'on s'en rend compte en utilisant les expressions de a, b', c'' au moyen des formules (22).

Soient ρ', ρ'' les racines ; soient X_1, X_2, X_3 les coefficients directeurs déduits de la racine $\rho = 1$, et X'_1, X'_2, X'_3 ; X''_1, X''_2, X''_3 ceux que l'on déduirait des racines ρ' et ρ''.

On obtient aisément, par un procédé classique que nous développerons dans le cas de quatre dimensions, les relations

$$(1 - \rho'^2)(X_1'^2 + X_2'^2 + X_3'^2) = 0,$$

et

$$(1 - \rho')(X_1 X'_1 + X_2 X'_2 + X_3 X'_3) = 0,$$

qui prouvent que la droite $O\Delta'$ est une droite *isotrope*, génératrice du cône

$$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = 0,$$

qui est le cône isotrope relatif au point O ; et que cette droite est orthogonale à la droite $O\Delta$.

Comme la droite $O\Delta''$ possède les mêmes propriétés, on voit finalement que le plan $O\Delta'\Delta''$, qui est réel, est orthogonal à la droite $O\Delta$; et, dans ce plan, les droites $O\Delta'$, $O\Delta''$ sont les droites isotropes du point O.

Si nous prenons de nouveaux axes de coordonnées rectangulaires, Ox_3 coïncidant avec $O\Delta$, Ox_1, Ox_2 étant par suite dans le plan $O\Delta'$, $O\Delta''$, les formules du déplacement considéré se simplifient et prennent nécessairement la forme

$$(27) \quad \left\{ \begin{aligned} x'_1 &= X_1 \cos\varphi - X_2 \sin\varphi, \\ x'_2 &= X_1 \sin\varphi + X_2 \cos\varphi, \\ x'_3 &= X_3. \end{aligned} \right.$$

Au point de vue géométrique, les formules (27) représentent une rotation autour de la droite $O\Delta$. Nous voyons que tout déplacement qui laisse immobile un point de l'espace à distance finie est une rotation autour d'un axe passant par ce point.

On peut aussi remarquer que le déplacement (21) est le résultat de la composition de la translation :

$$x_1 = \alpha_1 + x'_1,$$
$$x_2 = \alpha_2 + x'_2,$$
$$x_3 = \alpha_3 + x'_3$$

et d'une rotation autour d'un axe issu de l'origine. Tout déplacement est donc le résultat de la composition d'une translation et

d'une rotation autour d'un axe, et cela d'une infinité de manières, puisque nous pouvons prendre un point quelconque comme origine des coordonnées.

Conclusion. — Au point de vue géométrique, on peut dire que, dans la géométrie métrique euclidienne à trois dimensions, il existe un plan privilégié, qui est le plan de l'infini; et dans ce plan, des points particuliers jouent un rôle tout spécial; ce sont les points à l'infini de toutes les droites isotropes. Le lieu de ces points est une courbe qu'on nomme quelquefois la *conique imaginaire* de l'infini. Il est possible, en se plaçant au point de vue projectif, de rapporter à cette conique les définitions fondamentales des angles et des distances : on peut aussi construire des géométries non euclidiennes en la remplaçant par une autre conique, à distance finie ou infinie.

Dans ce dernier cas, on pourra opérer par voie purement analytique, en remplaçant la forme quadratique fondamentale

$$\Phi(X_1 - Y_1, X_2 - Y_2, X_3 - Y_3) = (X_1 - Y_1)^2 + (X_2 - Y_2)^2 + (X_3 - Y_3)^2$$

par une autre forme quadratique quelconque, et en raisonnant comme nous l'avons fait dans ce Chapitre.

CHAPITRE II.

GÉOMÉTRIE EUCLIDIENNE A QUATRE DIMENSIONS.

Après l'exposé analytique du Chapitre précédent, relatif à la géométrie euclidienne à trois dimensions, il va être facile d'aborder l'étude des déplacements d'une géométrie à une dimension de plus. C'est la géométrie quaternaire euclidienne que nous étudierons en premier lieu, afin de ne modifier tout d'abord que le moins possible nos habitudes.

On appellera point $M(x)$ l'ensemble des quatre nombres

$$x_1, \; x_2, \; x_3, \; x_4,$$

qui sont les coordonnées de ce point. La distance d de deux points $M(x)$, $P(y)$ est, par définition, donnée par la formule

$$(1) \qquad d^2 = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2 + (x_4 - y_4)^2.$$

Les transformations ponctuelles conservant les distances et satisfaisant à certaines conditions de continuité se ramènent à la forme générale

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} X_1 &= \alpha + a\, x_1 + b\, x_2 + c\, x_3 + d\, x_4, \\ X_2 &= \alpha' + a' x_1 + b' x_2 + c' x_3 + d' x_4, \\ X_3 &= \alpha'' + a'' x_1 + b'' x_2 + c'' x_3 + d'' x_4, \\ X_4 &= \alpha''' + a''' x_1 + b''' x_2 + c''' x_3 + d''' x_4, \end{aligned} \right.$$

les quantités α, α', α'', α''' et les éléments du déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \\ a''' & b''' & c''' & d''' \end{vmatrix}$$

étant des constantes que nous supposerons réelles. Les éléments

de (Δ) vérifient dix relations distinctes, qui sont par exemple les suivantes

$$(3)\quad \begin{cases} \Sigma a^2 = 1, \\ \Sigma b^2 = 1, \\ \Sigma c^2 = 1, \\ \Sigma d^2 = 1 \end{cases}$$

et

$$(4)\quad \begin{cases} \Sigma ab = 0, & \Sigma bc = 0, \\ \Sigma ac = 0, & \Sigma bd = 0, \\ \Sigma ad = 0, & \Sigma cd = 0. \end{cases}$$

Il en résulte que $\Delta^2 = 1$: nous n'étudierons que les déplacements tels que $\Delta = +1$.

A ces relations fondamentales (3) et (4), il convient d'adjoindre d'autres relations qui en sont les conséquences. Il résulte, par exemple, de la théorie élémentaire des déterminants, qu'on a

$$a = \begin{vmatrix} b' & c' & d' \\ b'' & c'' & d'' \\ b''' & c''' & d''' \end{vmatrix}$$

et

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c'' & d'' \\ c''' & d''' \end{vmatrix} \ldots$$

Sans qu'il soit nécessaire de préciser à l'avance le sens de tous les mots, il sera utile très fréquemment d'employer par la suite le *langage géométrique*.

Conservation des angles. — Comme en géométrie ordinaire à trois dimensions, de l'invariance des distances résulte nécessairement l'invariance des angles. L'angle V des deux directions $M(x)P(y)$ et $M(x)Q(z)$ est, par définition, tel que

$$MP\ MQ\cos V = \Sigma(x_1 - y_1)(x_1 - z_1).$$

Les directions MP, MQ sont orthogonales si

$$\Sigma(x_1 - z_1)(x_1 - y_1) = 0.$$

Droites, plans et hyperplans. — Étant donnés deux points distincts $M(x)$, $P(y)$, la droite MP est, par définition, le lieu des

points $Q(z)$ de coordonnées

$$z_i = x_i + \lambda(y_i - x_i);$$

de même, trois points distincts et non en ligne droite $M(x)$, $P(y)$, $Q(z)$ définissent un plan, lieu des points $R(u)$ de coordonnées

$$u_i = x_i + \lambda(y_i - x_i) + \mu(z_i - x_i);$$

enfin, étant donnés quatre points non dans un même plan, ils définissent un hyperplan, lieu des points

$$v_i = x_i + \lambda(y_i - x_i) + \mu(z_i - x_i) + \nu(u_i - x_i).$$

Il est intéressant de voir comment on pourra constituer, autour d'un point O qu'on prendra pour origine des coordonnées, les systèmes de droites, de plans et d'hyperplans liés par des conditions diverses d'orthogonalité.

Soit la droite $OM(x)$ définie par ses coefficients de direction x_1, x_2, x_3, x_4 : les coordonnées des points $P(y_1, y_2, y_3, y_4)$, tels que l'angle MOP soit droit, c'est-à-dire que

$$x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4 = 0$$

dépendent linéairement de trois paramètres : ces points constituent l'hyperplan passant par O et orthogonal à OM. Inversement, étant donné un hyperplan, défini par le point O, et les points $P(y)$, $Q(z)$, $R(u)$, il existe une droite OM orthogonale à cet hyperplan : les coefficients de direction de cette droite peuvent être pris égaux aux déterminants du troisième ordre tirés de la matrice :

$$\left\| \begin{matrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{matrix} \right\|.$$

Si l'on se donne deux droites OM et OP, les hyperplans perpendiculaires ont en commun un plan. Ce plan est dit *complètement perpendiculaire* au plan MOP. Et, en effet, toute droite du premier plan est perpendiculaire à toute droite du second. Car les relations

$$\Sigma x_i z_i = 0, \qquad \Sigma y_i z_i = 0, \qquad \Sigma x_i u_i = 0, \qquad \Sigma y_i u_i = 0,$$

entraînent

$$\Sigma(\lambda x_i + \mu y_i + \nu z_i + \rho u_i) = 0,$$

quels que soient λ, μ, ν, ρ.

On voit qu'en se bornant aux droites, plans et hyperplans contenant le point O : une droite, comme un hyperplan, dépend de trois paramètres distincts ; un plan dépend de quatre paramètres, car il est défini par les équations homogènes

$$\begin{aligned} u x_1 + v x_2 + w x_3 + h x_4 &= 0, \\ u' x_1 + v' x_2 + w' x_3 + h' x_4 &= 0, \end{aligned}$$

qu'on peut aussi considérer comme fixant la position d'une droite dans l'espace ordinaire. Nous serons conduits d'ailleurs par la suite à préciser davantage la détermination effective d'un plan par la connaissance de quatre paramètres convenablement choisis.

Point invariable de la transformation (2). — Cherchons s'il existe un point A (x_1, x_2, x_3, x_4) qui coïncide avec son transformé A' dans le déplacement (2). Les coordonnées du point M seront données par le système linéaire

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} &\alpha + (a-1)x_1 + b x_2 + c x_3 + d x_4 = 0, \\ &\alpha' + a' x_1 + (b'-1)x_2 + c' x_3 + d' x_4 = 0, \\ &\alpha'' + a'' x_1 + b'' x_2 + (c''-1)x_3 + d'' x_4 = 0, \\ &\alpha''' + a''' x_1 + b''' x_2 + c''' x_3 + (d'''-1)x_4 = 0, \end{aligned}\right.$$

dont le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} a-1 & b & c & d \\ a' & b'-1 & c' & d' \\ a'' & b'' & c''-1 & d'' \\ a''' & b''' & c''' & d'''-1 \end{vmatrix}$$

est, en général, différent de zéro [1]. Il existe donc en général un point invariable et un seul. Nous laissons de côté pour l'instant des déplacements spéciaux qui n'auraient pas de point fixe ou en auraient une infinité. Nous bornant au cas général, et transportant les axes au point A, nous obtenons, pour le déplacement (2), des

[1] Nous reviendrons sur ce point dans un instant.

formules où les termes constants α, α', α'', α''' ont disparu, mais où les éléments du déterminant (Δ) n'ont pas changé.

Ce sont les propriétés de ce déplacement autour d'un point fixe que nous allons maintenant étudier.

Droites invariables par le déplacement autour d'un point fixe. — Cherchons s'il existe une droite OΔ de coefficients de direction x_1, x_2, x_3, x_4 qui demeure invariable par le déplacement (2) que nous avons pu ramener à la forme

$$(6)\quad \begin{cases} X'_1 = a\ X_1 + b\ X_2 + c\ X_3 + d\ X_4, \\ X'_2 = a'\ X_1 + b'\ X_2 + c'\ X_3 + d'\ X_4, \\ X'_3 = a''\ X_1 + b''\ X_2 + c''\ X_3 + d''\ X_4, \\ X'_4 = a'''\ X_1 + b'''\ X_2 + c'''\ X_3 + d'''\ X_4. \end{cases}$$

On aura alors

$$\frac{X'_1}{X_1} = \frac{X'_2}{X_2} = \frac{X'_3}{X_3} = \frac{X'_4}{X_4}.$$

Et, en désignant par ρ la valeur commune de ces rapports, les quantités X_1, X_2, X_3, X_4 sont données par le système linéaire

$$(7)\quad \begin{cases} (a-\rho)X_1 + bX_2 + cX_3 + dX_4 = 0, \\ a'X_1 + (b'-\rho)X_2 + c'X_3 + d'X_4 = 0, \\ a''X_1 + b''X_2 + (c''-\rho)X_3 + d''X_4 = 0, \\ a'''X_1 + b'''X_2 + c'''X_3 + (d'''-\rho)X_4 = 0, \end{cases}$$

dont le déterminant s'écrit

$$\delta = \begin{vmatrix} a-\rho & b & c & d \\ a' & b'-\rho & c' & d' \\ a'' & b'' & c''-\rho & d'' \\ a''' & b''' & c''' & d'''-\rho \end{vmatrix}.$$

On doit avoir $\delta = 0$, ce qui s'écrit, en utilisant des formules déjà signalées relatives au déterminant des seize cosinus

$$(8)\quad \rho^4 - 1 - (a + b' + c'' + d''')(\rho^3 + \rho) + \rho^2\Sigma(ab' - ba') = 0.$$

Cette équation en ρ est une équation réciproque ; nous n'avons pas à en faire l'étude algébrique systématique ; nous utiliserons seulement dans la suite les remarques suivantes :

1° Cette équation, réciproque de degré pair, n'admet pas en général la racine $+1$, ni la racine -1 : car elle devrait avoir une racine double ce qui entraînerait des relations particulières entre les cosinus (1).

2° Des formules

$$X'_1 = \rho X_1,$$
$$X'_2 = \rho X_2,$$
$$X'_3 = \rho X_3,$$
$$X'_4 = \rho X_4$$

résulte que si ρ est racine de (8) et si X_1, X_2, X_3, X_4 sont les coefficients de direction de la droite $O\Delta$ correspondante, on a

$$(1-\rho^2)(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2) = 0.$$

Et, comme ρ^2 est différent de 1, la droite $O\Delta$ vérifie la relation

$$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 = 0.$$

On dit que c'est une droite isotrope. Et il résulte de là que ρ est imaginaire, car, si ρ était réel, le système linéaire (7) ne pourrait donner les coefficients de direction d'une droite isotrope.

L'équation (8) a donc ses racines imaginaires. Ces racines sont conjuguées deux à deux puisque les coefficients sont réels et deux racines conjuguées sont inverses l'une de l'autre puisque l'équation est réciproque, ce qui montre que les racines ont toutes pour module 1 (2).

3° Soient ρ', ρ'_0 et ρ'', ρ''_0 ces quatre racines. Si X'_1, X'_2, X'_3, X'_4

---

(1) Le fait que l'équation (8) n'admet pas la racine 1 entraîne bien que le déterminant D considéré à la page 19 est différent de zéro. Comme les 16 quantités a, b, ..., d''' ne sont pas indépendantes on pourrait se demander si l'équation (8) n'a pas *toujours* une racine double. Pour se convaincre qu'il n'en est pas ainsi, il suffit de constater que dans un cas particulier, l'équation (8) n'a pas de racine double ; on peut choisir, par exemple, le cas où les équations (6) se réduisent à la forme (9) ci-après.

(2) On peut démontrer directement que le module des racines est égal à 1; car on a évidemment

$$|X'_1| = |\rho||X_1|$$

et d'autre part les équations (6) dans lesquelles les coefficients a, b, ..., d''' sont réels entraînent

$$|X'_1|^2 + |X'_2|^2 + |X'_3|^2 + |X'_4|^2 = |X_1|^2 + |X_2|^2 + |X_3|^2 + |X_4|^2.$$

et $X''_1, X''_2, X''_3, X''_4$ sont les coefficients déduits des racines ρ' et ρ'', on peut écrire

$$(1 - \rho'\rho'')(X'_1 X''_1 + X'_2 X''_2 + X'_3 X''_3 + X'_4 X''_4) = 0.$$

Comme $1 - \rho'\rho''$ n'est pas nul, les directions (X') et (X'') sont rectangulaires.

Conclusion. — Dans le déplacement (6) il existe quatre droites isotropes $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$, qui demeurent invariables. Les plans $\Delta_1\Delta_2$ et $\Delta_3\Delta_4$ sont réels, et complètement perpendiculaires : ces plans glissent sur eux-mêmes dans le mouvement.

Le déplacement (6) se compose donc de deux rotations simples effectuées dans deux plans complètement perpendiculaires. Si l'on choisit dans le plan $\Delta_1\Delta_2$ deux axes rectangulaires OZ_1, OZ_2, et dans le plan $\Delta_3\Delta_4$ deux autres axes rectangulaires OZ_3, OZ_4, on pourra prendre pour système d'axes le système OZ_1, OZ_2, OZ_3, OZ_4, et les formules (6) seront remplacées par les formules

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} z_1 &= Z_1 \cos\varphi - Z_2 \sin\varphi,\\ z_2 &= Z_1 \sin\varphi - Z_2 \cos\varphi,\\ z_3 &= Z_3 \cos\theta - Z_4 \sin\theta,\\ z_4 &= Z_3 \sin\theta + Z_4 \cos\theta.\end{aligned}\right.$$

L'équation (8) devient en ce cas :

$$(\rho^2 - 2\rho\cos\varphi + 1)(\rho^2 - 2\rho\cos\theta + 1) = 0.$$

Pour définir cette opération (9), il faut d'abord se donner quatre paramètres, pour avoir le plan $\Delta_1 O \Delta_2$; le plan $\Delta_3 O \Delta_4$ est alors complètement déterminé. La donnée des deux angles φ et θ porte à six le nombre des paramètres dont dépendent les déplacements (6) autour d'un point fixe.

C'est une conséquence également du fait que les seize cosinus du déterminant (Δ) vérifient dix relations distinctes.

Formules de Cayley. — Nous avons vu que les neuf cosinus qui figurent dans les formules du déplacement le plus général de l'espace à trois dimensions dépendent de trois paramètres, et comment on peut les exprimer en fonction des trois paramètres d'Olinde Rodrigues λ, μ, ν.

C'est Cayley qui le premier a résolu le même problème pour les seize cosinus des déplacements à quatre dimensions. Sa démonstration est purement analytique, et basée sur les propriétés des déterminants gauches. Elle est valable pour un nombre quelconque de coordonnées, et contient par conséquent la démonstration des formules de Rodrigues.

Voici, pour l'espace à quatre dimensions, les formules qu'il a obtenues.

$$
(10)\quad
\left\{
\begin{aligned}
\delta x_1 &= (1 - f^2 + g^2 + h^2 - a^2 - b^2 - c^2)\,X_1 \\
&\quad + 2(f\theta + a + bh - cg)\,X_2 \\
&\quad + 2(g\theta + b + cf - ah)\,X_3 \\
&\quad + 2(h\theta + c + ag - bf)\,X_4, \\
\delta x_2 &= 2(-f\theta - a + bh - cg)\,X_1 \\
&\quad + (1 - f^2 + b^2 + c^2 - g^2 - a^2 - h^2)\,X_2 \\
&\quad + 2(-c\theta - h + fg - ab)\,X_3 \\
&\quad + 2(b\theta + g + hf - ac)\,X_4, \\
\delta x_3 &= 2(-g\theta - b + cf - ah)\,X_1 \\
&\quad + 2(c\theta + h + fg - ab)\,X_2 \\
&\quad + (1 + g^2 - c^2 + a^2 - f^2 - h^2 - b^2)\,X_3 \\
&\quad + 2(-a\theta - f + gh - bc)\,X_4, \\
\delta x_4 &= 2(-h\theta - c + ag - bf)\,X_1 \\
&\quad + 2(-b\theta - g + hf - ac)\,X_2 \\
&\quad + 2(a\theta + f + gh - bc)\,X_3 \\
&\quad + (1 + h^2 + a^2 - b^2 - f^2 - g^2 - c^2)\,X_4.
\end{aligned}
\right.
$$

Les six paramètres sont a, b, c, f, g, h et l'on a posé

$$\theta = af + bg + ch, \qquad \delta = 1 + a^2 + b^2 + c^2 + f^2 + g^2 + h^2.$$

Nous allons utiliser la forme canonique obtenue déjà (9), pour arriver, par une voie plus géométrique que celle suivie par Cayley, à des formules équivalentes aux formules (10).

Détermination des seize cosinus. — A la vérité nous introduirons, pour la symétrie, deux paramètres supplémentaires, les huit paramètres étant liés par deux relations. Car le plan $\Delta_1 O \Delta_2$, dont la connaissance suffit pour avoir les axes canoniques OZ_1, Z_2, Z_3, Z_4 est déterminé complètement par la connaissance de sa droite d'in-

tersection avec l'hyperplan à l'infini. Et l'on peut définir cette droite par six coordonnées plückériennes équivalant à quatre paramètres.

Soient $M(x_1, x_2, x_3, x_4)$ et $P(y_1, y_2, y_3, y_4)$ deux points du plan $\Delta_1 O \Delta_2$ tels que $OM = OP = 1$, et que $\widehat{POM} = \frac{\pi}{2}$. On aura

$$\Sigma x_1^2 = 1,$$
$$\Sigma x_1 y_1 = 0,$$
$$\Sigma y_1^2 = 1.$$

Nous poserons

$$\alpha = x_1 y_4 - y_1 x_4, \qquad \lambda = x_2 y_3 - y_2 x_3,$$
$$\beta = x_2 y_4 - y_2 x_4, \qquad \mu = x_3 y_1 - y_3 x_1,$$
$$\gamma = x_3 y_4 - y_3 x_4, \qquad \nu = x_1 y_2 - y_1 x_2,$$

les six paramètres $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \nu$ vérifiant les deux relations

$$(1) \quad \begin{cases} \alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu = 0, \\ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1. \end{cases}$$

On voit qu'au fond nous utilisons quatre paramètres effectifs; nous leur adjoindrons les deux angles de rotation φ et θ.

Soient Q et R deux points de coordonnées (u_1, u_2, u_3, u_4) et (v_1, v_2, v_3, v_4) tels que $OQ = OR = 1$, $\widehat{QOR} = \frac{\pi}{2}$, et situés dans le plan complètement perpendiculaire au plan MOQ.

On a les relations

$$\Sigma u_1 x_1 = 0, \qquad \Sigma u_1 v_1 = 0,$$
$$\Sigma u_1 y_1 = 0, \qquad \Sigma u_1^2 = 1,$$
$$\Sigma v_1 x_1 = 0, \qquad \Sigma v_1^2 = 1,$$
$$\Sigma v_1 y_1 = 0,$$

qui montrent que les seize éléments du Tableau

$$(T) \qquad \begin{Vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{Vmatrix}$$

sont seize cosinus, et par conséquent, on a

$$\begin{vmatrix} x_3 & x_4 \\ y_3 & y_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix},$$

et les relations analogues. Si l'on désigne donc par α', β', γ', λ', μ', ν' les combinaisons analogues à α, β, γ, λ, μ, ν et formées avec les coordonnées (u), (v), on a par conséquent

$$\begin{aligned} \alpha &= \lambda', & \lambda &= \alpha', \\ \beta &= \mu', & \mu &= \beta', \\ \gamma &= \nu', & \nu &= \gamma'. \end{aligned}$$

Soit à calculer les coefficients des formules (6), où les (x) sont les coordonnées rapportées aux axes primitifs. Par rapport aux axes OM, OP, OQ, OR, que nous supposons être dans les conditions des formules (9), on a

$$(9)\quad \left\{ \begin{aligned} Z'_1 &= Z_1 \cos\varphi - Z_2 \sin\varphi, \\ Z'_2 &= Z_1 \sin\varphi + Z_2 \cos\varphi, \\ Z'_3 &= Z_3 \cos\theta - Z_4 \sin\theta, \\ Z'_4 &= Z_3 \sin\theta + Z_4 \cos\theta. \end{aligned} \right.$$

Entre les coordonnées anciennes, d'une part, et les coordonnées nouvelles, on a les relations suivantes :

$$(12)\quad \left\{ \begin{aligned} Z_1 &= x_1 X_1 + x_2 X_2 + x_3 X_3 + x_4 X_4, \\ Z_2 &= y_1 X_1 + y_2 X_2 + y_3 X_3 + y_4 X_4, \\ Z_3 &= u_1 X_1 + u_2 X_2 + u_3 X_3 + u_4 X_4, \\ Z_4 &= v_1 X_1 + v_2 X_2 + v_3 X_3 + v_4 X_4, \end{aligned} \right.$$

où il est aisé de faire l'inversion.

On peut écrire les formules (9) sous une autre forme

$$(13)\quad \left\{ \begin{aligned} Z'_1 = {} & (x_1 X_1 + x_2 X_2 + x_3 X_3 + x_4 X_4) \cos\varphi \\ & - (y_1 X_1 + y_2 X_2 + y_3 X_3 + y_4 X_4) \sin\varphi, \\ Z'_2 = {} & \Sigma x_1 X_1 \sin\varphi + \Sigma y_1 X_1 \cos\varphi, \\ Z'_3 = {} & \Sigma u_1 X_1 \cos\theta - \Sigma v_1 X_1 \sin\theta, \\ Z'_4 = {} & \Sigma u_1 X_1 \sin\theta + \Sigma v_1 X_1 \cos\theta. \end{aligned} \right.$$

Et, par conséquent, on a

$$(14)\quad \left\{ \begin{aligned} X'_1 = {} & x_1 Z'_1 + y_1 Z'_2 + u_1 Z'_3 + v_1 Z'_4 \\ = {} & x_1 (\Sigma x_1 X_1 \cos\varphi - \Sigma y_1 X_1 \sin\varphi) + y_1 (\Sigma x_1 X_1 \sin\varphi + \Sigma y_1 X_1 \cos\varphi) \\ & + u_1 (\Sigma u_1 X_1 \cos\theta - \Sigma v_1 X_1 \sin\theta) + v_1 (\Sigma u_1 X_1 \sin\theta + \Sigma v_1 X_1 \cos\theta), \\ X'_2 = {} & x_2 Z'_1 + y_2 Z'_2 + u_2 Z'_3 + v_2 Z'_4 = \Sigma x_2 (\Sigma x_1 X_1 \cos\varphi - \Sigma y_1 X_1 \sin\varphi), \\ X'_3 = {} & x_3 Z'_1 + y_3 Z'_2 + u_3 Z'_3 + v_3 Z'_4 = \Sigma x_3 (\Sigma x_1 X_1 \cos\varphi - \Sigma y_1 X_1 \sin\varphi), \\ X'_4 = {} & x_4 Z'_1 + y_4 Z'_2 + u_4 Z'_3 + v_4 Z'_4 = \Sigma x_4 (\Sigma x_1 X_1 \cos\varphi - \Sigma y_1 X_1 \sin\varphi). \end{aligned} \right.$$

Les formules (14) sont les formules cherchées. Les coefficients de X_1, X_2, X_3, X_4 semblent contenir les seize éléments du Tableau (T); en réalité, leurs expressions se simplifient assez pour ne contenir finalement que α, β, γ, λ, μ, ν.

Faisons le calcul de a et de b par exemple. On a

$$\begin{aligned} a &= (x_1^2 + y_1^2) \cos\varphi + (u_1^2 + v_1^2) \cos\theta, \\ b &= (x_1 x_2 + y_1 y_2) \cos\varphi + (x_2 y_1 - x_1 y_2) \sin\varphi \\ &\quad + (u_1 u_2 + v_1 v_2) \cos\theta + (v_1 u_2 - u_1 v_2) \sin\theta. \end{aligned}$$

Mais on peut écrire, puisque $\Sigma x_1^2 = \Sigma y_1^2 = 1$ et $\Sigma x_1 y_1 = 0$:

$$\begin{aligned} x_1^2 + y_1^2 &= x_1^2 \Sigma y_1^2 + y_1^2 \Sigma x_1^2 - 2 x_1 y_1 \Sigma x_1 y_1 \\ &= (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 + (x_1 y_3 - x_3 y_1)^2 + (x_1 y_4 - x_4 y_1)^2 = \mu^2 + \nu^2 + \alpha^2. \end{aligned}$$

De même

$$u_1^2 + v_1^2 = \mu'^2 + \nu'^2 + \alpha'^2 = \lambda^2 + \beta^2 + \gamma^2;$$

d'où

$$a = (\alpha^2 + \mu^2 + \nu^2) \cos\varphi + (\beta^2 + \gamma^2 + \lambda^2) \cos\theta,$$

D'une manière analogue :

$$\begin{aligned} x_1 x_2 + y_1 y_2 &= x_1 x_2 \Sigma y_1^2 + y_1 y_2 \Sigma x_1^2 - (x_1 y_2 + y_1 x_2) \Sigma x_1 y_1 \\ &= x_1 x_2 (y_3^2 + y_4^2) + y_1 y_2 (x_3^2 + x_4^2) \\ &\qquad - (x_1 y_2 + y_1 x_2)(x_3 y_3 + x_4 y_4) = \alpha\beta - \lambda\mu, \end{aligned}$$

d'où

$$b = (\alpha\beta - \lambda\mu)(\cos\varphi - \cos\theta) + \nu \sin\varphi + \gamma \sin\theta.$$

En transformant ainsi tous les coefficients, on obtient le Tableau suivant :

$$(15) \quad \left\| \begin{array}{ll} (\alpha^2 + \mu^2 + \nu^2) \cos\varphi + (\beta^2 + \gamma^2 + \lambda^2) \cos\theta & (\alpha\beta - \lambda\mu)(\cos\varphi - \cos\theta) + \nu \sin\varphi + \gamma \sin\theta \\ (\alpha\beta - \lambda\mu)(\cos\varphi - \cos\theta) - \nu \sin\varphi - \gamma \sin\theta & (\beta^2 + \lambda^2 + \nu^2) \cos\varphi + (\mu^2 + \alpha^2 + \gamma^2) \cos\theta \\ (\alpha\gamma - \lambda\nu)(\cos\varphi - \cos\theta) + \mu \sin\varphi + \beta \sin\theta & (\beta\gamma - \mu\nu)(\cos\varphi - \cos\theta) - \lambda \sin\varphi - \alpha \sin\theta \\ (\gamma\mu - \beta\nu)(\cos\varphi - \cos\theta) + \alpha \sin\varphi + \lambda \sin\theta & (\alpha\nu - \lambda\gamma)(\cos\varphi - \cos\theta) - \beta \sin\varphi - \mu \sin\theta \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{ll} (\alpha\gamma - \lambda\nu)(\cos\varphi - \cos\theta) - \mu \sin\varphi - \beta \sin\theta & (\gamma\mu - \beta\nu)(\cos\varphi - \cos\theta) + \alpha \sin\varphi + \lambda \sin \\ (\beta\gamma - \mu\nu)(\cos\varphi - \cos\theta) + \lambda \sin\varphi + \alpha \sin\theta & (\alpha\nu - \lambda\gamma)(\cos\varphi - \cos\theta) + \beta \sin\varphi + \mu \sin \\ (\gamma^2 + \lambda^2 + \mu^2) \cos\varphi + (\nu^2 + \alpha^2 + \beta^2) \cos\theta & (\beta\lambda - \alpha\mu)(\cos\varphi - \cos\theta) + \gamma \sin\varphi + \nu \sin \\ (\beta\lambda - \alpha\mu)(\cos\varphi - \cos\theta) - \gamma \sin\varphi - \nu \sin\theta & (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \cos\varphi + (\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) \cos \end{array}$$

qui donne les seize cosinus exprimés au moyen d'éléments dont la signification géométrique est simple et bien connue. Nous ne pousserons pas plus loin l'étude des déplacements à quatre dimensions. Au sujet de la composition de ces déplacements, on peut se reporter à un Mémoire de M. Cole (*American Journal of Mathematics*, t. XII).

CHAPITRE III.

GÉOMÉTRIE HYPERBOLIQUE SPÉCIALE A DEUX DIMENSIONS.

Les transformations que nous allons étudier sont les déplacements d'une géométrie particulière, laquelle n'est pas, à proprement parler, une géométrie non euclidienne, puisqu'elle admet une théorie des parallèles conforme au *postulatum*. Elle présentera cependant avec la géométrie ordinaire des différences essentielles, relatives non plus aux translations, mais aux rotations.

Nous emploierons l'appareil analytique de Descartes : une exposition purement abstraite serait possible, mais moins aisée; et d'ailleurs ce sont les formules analytiques que nous établirons qui nous seront utiles par la suite, plutôt que les propriétés géométriques fondamentales.

C'est aux points à l'infini i, j des axes rectangulaires Ox, Oy que nous ferons jouer le rôle des points cycliques I et J. Les déplacements seront alors des transformations projectives laissant ces points invariables, les rotations possédant en outre la propriété de faire glisser sur elles-mêmes les coniques (Γ) ayant pour centre le centre de rotation et passant par i et j.

Translations. — Une translation, au sens de la géométrie ordinaire, laisse invariable chaque point à l'infini. En vertu de nos définitions, les translations font donc partie du groupe que nous étudions. En ce qui les concerne, et par conséquent en ce qui concerne la théorie des parallèles, il n'y a aucune différence entre la géométrie hyperbolique actuelle et la géométrie ordinaire.

Rotations. — Une rotation autour du point O est une transformation projective représentée par des équations de la forme

$$(1)\qquad \begin{cases} x = \alpha X + \beta Y, \\ y = \alpha' X + \beta' Y. \end{cases}$$

Les droites issues de O et laissées invariables ont leurs coefficients angulaires donnés par l'équation

$$(2) \qquad m = \frac{\alpha' + \beta' m}{\alpha + \beta m}.$$

Ces droites étant, par hypothèse, les axes de coordonnées, nous voyons qu'on doit avoir

$$(3) \qquad \begin{cases} \alpha' = 0, \\ \beta = 0. \end{cases}$$

Mais de plus, les hyperboles (H) $xy = k$ doivent glisser sur elles-mêmes dans la rotation; et cette condition nouvelle donne

$$\alpha\beta' = 1;$$

de sorte que les rotations hyperboliques de centre O sont représentées par les formules

$$(4) \qquad \begin{cases} x = \lambda X, \\ y = \dfrac{Y}{\lambda}. \end{cases}$$

Nous n'étudierons que les opérations pour lesquelles λ est positif; et pour simplifier nous ne considérerons que des figures situées dans l'angle xOy ou dans son opposé par le sommet; cette restriction qui n'a rien d'indispensable ici correspondra plus loin dans l'application à la théorie de la relativité, à une réalité physique.

Déplacements. — Le groupe des déplacements comprenant les translations et les rotations autour d'un point quelconque se représente facilement par les formules

$$(5) \qquad \begin{cases} x = a + \lambda X, \\ y = b + \dfrac{Y}{\lambda}. \end{cases}$$

Comme le groupe euclidien plan, il dépend de trois paramètres.

Distance de deux points. — Étant donnés deux segments de droite $p_1(x_1, y_1)$ $p_2(x_2, y_2)$ et $P_1 P_2$, il n'est pas, en général, possible de les faire coïncider par un déplacement (5). La condition nécessaire et suffisante pour que cette opération soit possible

est que

$$(6) \qquad (x_1 - x_2)(y_1 - y_2) = (X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2).$$

Nous donnerons à la quantité

$$(7) \qquad \delta = \sqrt{(x_1 - x_2)(y_1 - y_2)}$$

le nom de *distance* des points p_1, p_2, et nous pourrons dire en langage ordinaire : la condition nécessaire et suffisante pour que deux segments de droite $p_1 p_2$, $P_1 P_2$ puissent être amenés à coïncider, est qu'ils aient même longueur. Les déplacements (6) conservent donc les distances, au sens où désormais nous entendons ce mot. Nous nous occuperons plus spécialement dans la suite des rotations hyperboliques autour du point O : ne différant que par une translation ordinaire du déplacement hyperbolique le plus général, ces rotations nous suffiront pour l'étude des questions fondamentales.

Unité de longueur. — Soit M un point de coordonnées x, y. D'après la définition de la distance δ, appliquée aux points O et M, on a $\overline{OM}^2 = xy$. Le lieu géométrique des points situés à la distance 1 de l'origine O est l'hyperbole équilatère

$$xy = 1.$$

Si sur le rayon OM on fait glisser le segment OM, ou si on lui fait subir une translation quelconque, il conservera toujours une longueur égale à 1. On peut dire qu'en ce qui concerne les distances, notre plan *est homogène, mais non isotrope;* on peut construire des géométries métriques où la propriété de l'homogénéité disparaît.

Droites de longueur nulle. — Si le point M est sur l'un des axes Ox ou Oy, on a $OM = 0$. Les parallèles à Ox ou à Oy sont donc ici les droites de longueur nulle; ce sont elles qui remplacent les droites isotropes du plan euclidien.

Conservation des angles. — Soient deux points MM′, de coordonnées xy, $x'y'$. Les rotations (4) conservent la grandeur de l'expression

$$(8) \qquad \overline{MM'}^2 = (x - x')(y - y').$$

Or on peut écrire $\overline{MM'}^2 = xy + x'y' - (xy' + yx')$. Et il résulte de là que la combinaison $xy' + yx'$ est un invariant relativement aux rotations (4). Nous allons préciser la nature de cet invariant, en étendant ici la formule de Laguerre (Chap. I).

Introduisons en effet les coefficients angulaires

$$m = \frac{y}{x}, \qquad m' = \frac{y'}{x'}.$$

Le rapport anharmonique

$$\rho = (OM', OM, Ox, Oy),$$

s'écrit $\rho = \dfrac{m'}{m}$. Cette quantité est un invariant, en vertu des propriétés classiques des transformations projectives.

Mais si l'on appelle *angle des directions* OM', OM la quantité $V = \frac{1}{2}\operatorname{Log}\rho$, on a $\sqrt{\rho} + \frac{1}{\sqrt{\rho}} = e^V + e^{-V} = 2\operatorname{ch}V$, et l'on voit qu'on peut écrire

$$(9) \qquad xy' + yx' = 2\sqrt{xy.x'y'}.\operatorname{ch}V,$$

ce qui permet de remplacer la formule (8) par

$$\overline{MM'}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{OM'}^2 - 2.OM.OM'\operatorname{ch}V.$$

Notre géométrie est donc constituée quant à ses principes. Nous connaissons en effet, l'expression analytique générale de ses déplacements, et nous avons dégagé les invariants fondamentaux qui jouent le rôle des *distances* et des *angles*.

Nous allons maintenant étudier quelques questions simples, afin de préciser les points où les différences avec la géométrie classique sont notables.

Puissance $p^{ième}$ d'une rotation. — La rotation

$$(4) \qquad (R)\left\{\begin{aligned} x &= \lambda X,\\ y &= \frac{Y}{\lambda}\end{aligned}\right.$$

fait correspondre à la droite de coefficient angulaire m une droite de coefficient $m' = m\lambda^2$. Si l'on fait subir p fois de suite la rotation (4) à cette droite, elle prendra une position de coefficient

angulaire m_p défini par la relation

$$m_p = m\lambda^{2p}.$$

Si p grandit, cette droite se rapproche indéfiniment, soit de Oy, soit de Ox, suivant la valeur de λ, mais jamais elle ne revient en arrière. Rien ici ne peut conduire à une théorie de polygones réguliers d'un nombre fini de côtés. Les angles hyperboliques autour du point O sont comparables aux longueurs sur une ligne droite. On dit que le groupe des rotations $1, R, \ldots, R^p, \ldots$ admet un domaine fondamental.

Éléments orthogonaux. — Soit un angle MOM' : examinons si, étant donnée notre définition

$$V = \frac{1}{2} \operatorname{Log} \frac{m'}{m},$$

il est possible que $V = \frac{i\pi}{2}$. On aura alors

$$\operatorname{ch} V = 0 \qquad \text{ou} \qquad m + m' = 0.$$

On dit alors que les droites de coefficients angulaires m et m' sont perpendiculaires. Par exemple, la tangente MT à l'hyperbole

$$(1) \qquad xy = 1.$$

est perpendiculaire au rayon vecteur OM. Et si l'on prend sur MT un point P quelconque, OP coupant (H) en Q, on a

$$\overline{OM} = \overline{OQ} = 1 \qquad \text{et} \qquad \overline{OP} < \overline{OQ}.$$

Ceci indique qu'en géométrie hyperbolique, *la perpendiculaire menée d'un point sur une droite est plus longue que toute oblique.* Ce résultat peut être précisé. On a, en désignant par $x'y'$ les coordonnées du point P,

$$\frac{y}{x} + \frac{y - y'}{x - x'} = 0,$$

d'où l'on tire

$$x'y' = xy + (x - x')(y - y'),$$

ou supposant P dans l'angle xOy,

$$\overline{OP}^2 = \overline{OM}^2 + (x - x')(y - y').$$

La quantité $(x-x')(y-y')$ est négative, et, au sens de notre définition, la distance MP n'est pas réelle; nous conviendrons de désigner par le symbole MP la quantité

$$\sqrt{|(x-x')(y-y')|} = i\sqrt{(x-x')(y-y')},$$

et nous ferons cette convention pour toutes les distances imaginaires. Cela revient à faire jouer le rôle du cercle $x^2+y^2=1$ à l'ensemble constitué par les deux hyperboles conjuguées

$$xy=1, \qquad xy=-1.$$

Cette convention nouvelle n'introduit pas de contradictions dans ce qui précède. Nous pouvons alors écrire

$$\overline{\mathrm{OP}}^2 = \overline{\mathrm{OM}}^2 + \overline{\mathrm{MP}}^2.$$

C'est là le théorème qui, moyennant nos définitions et nos conventions, remplace le théorème de Pythagore.

Aires. — Nous appellerons *aire du domaine plan* D l'intégrale $\int\int dx\,dy$; nous ne modifions pas la définition ordinaire de l'aire. Et en effet, les aires ainsi définies sont inaltérées par les transformations (6); il est donc légitime de les considérer ici.

Soit à évaluer, à titre d'exemple, l'aire du triangle MOM', les points M, M' étant situés à l'angle xOy et sur la courbe $xy=1$. Si m et m' sont les coefficients angulaires de OM et OM', et si xy, $x'y'$ sont les coordonnées de ces points, on aura

$$2\mathrm{S} = xy' - yx' = \frac{m'-m}{\sqrt{mm'}} = \operatorname{sh} \mathrm{V}.$$

D'où en général la formule

$$\mathrm{S} = \frac{1}{2}\,\mathrm{OM}.\mathrm{OM}' \operatorname{sh} \mathrm{V}.$$

Autre représentation analytique des rotations (1). — Si, au lieu des asymptotes, nous prenons pour axes de coordonnées les axes de symétrie des hyperboles (H) considérées plus haut, nous avons, en désignant par $x'y'$ les coordonnées nouvelles,

$$x' = \frac{x+y}{\sqrt{2}},$$

$$y' = \frac{y-x}{\sqrt{2}},$$

et la distance du point M au centre est donnée par la formule

$$\overline{OM}^2 = x'^2 - y'^2.$$

Si nous posons alors

$$\lambda = e^{\varphi},$$

les formules (4) prendront la forme suivante :

$$(10) \qquad \begin{cases} x' = X' \operatorname{ch} \varphi + Y' \operatorname{sh} \varphi, \\ y' = X' \operatorname{sh} \varphi + Y' \operatorname{ch} \varphi, \end{cases}$$

d'où l'on tire d'ailleurs

$$(11) \qquad x'^2 - y'^2 = X'^2 - Y'^2.$$

Nous aurions évidemment pu partir de la formule (11) ; un raisonnement pareil à celui que nous avons utilisé dans la détermination des déplacements euclidiens à trois dimensions, nous aurait donné les formules générales

$$(12) \qquad \begin{cases} x' = a + X' \operatorname{ch} \varphi + Y' \operatorname{sh} \varphi, \\ y' = b + X' \operatorname{sh} \varphi + Y' \operatorname{ch} \varphi. \end{cases}$$

Application à la théorie physique de la relativité. — Soit une droite fixe (Δ), sur laquelle il a été fait choix d'une origine et d'un sens de parcours. La présence à l'instant t d'un mobile déterminé au point M de (Δ) qui a pour abscisse x est un phénomène qui dépend des deux nombres x et t. Ce phénomène est, selon l'expression quelquefois employée, un événement de l'histoire de la droite (Δ). L'étude de ces événements constitue donc, somme toute, celle d'une multiplicité à deux dimensions ; nous lui donnerons la forme d'une géométrie à deux dimensions t et x, et nous appliquerons cette représentation au problème simple de la composition de deux mouvements uniformes sur (O), en admettant le principe de relativité, sous la forme que lui ont donné les travaux de Lorentz, Minkowski, Einstein.

Examinons d'abord ce qui se passe en restant dans la cinématique classique. Un mouvement uniforme sur (Δ) est représenté par l'équation

$$(13) \qquad x = vt,$$

à laquelle nous associerons la droite (D) qu'elle représente dans le plan Ox, Ot. Si la droite (Δ) glisse sur elle-même d'un mouvement uniforme de vitesse v', le mouvement représenté par l'équation (13) sera, rapporté à l'axe fixe Δ_1 qui porte (Δ),

$$(14) \qquad x = (v - v')t;$$

et à l'équation (14) nous associerons la droite D' correspondante.

Ce changement du système de comparaison a donc pour image, dans le plan Ox, Ot, une transformation simple de droites passant par l'origine des coordonnées. Cette correspondance entre D et D' est une correspondance homographique; les rayons doubles sont confondus suivant Ox. Quelque grands que soient les nombres v, v', s'ils restent finis, les droites D' n'atteindraient jamais la position Ox. De deux mouvements de vitesse finie résulte un mouvement de vitesse finie, c'est là une proposition évidente.

Voyons maintenant ce que devient la transformation de droites (D, D') si nous admettons le principe de relativité : *la vitesse de la lumière est indépendante, rigoureusement, de la translation uniforme de l'observateur qui la mesure* [1]. Nous sommes conduits à admettre que si le mouvement du point M s'effectue avec la vitesse de la lumière sur Δ, il s'effectuera aussi avec la vitesse de la lumière sur Δ_1; et comme rien ne nous empêche de prendre pour unité de vitesse cette vitesse invariante de la lumière, nous sommes conduits à cette conséquence que la transformation de droites considérée, quelle qu'en soit sa nature, admet les droites $x = t$, $x = -t$ comme droites doubles.

Si donc nous admettons que cette transformation est une transformation linéaire, elle sera nécessairement de la forme

$$(12) \qquad \begin{cases} T = \lambda(t \operatorname{ch} \varphi + x \operatorname{sh} \varphi), \\ X = \lambda(t \operatorname{sh} \varphi + x \operatorname{ch} \varphi), \end{cases}$$

---

[1] M. Einstein, dans ses dernières recherches, a abandonné cette hypothèse de l'invariance de la vitesse de la lumière et l'a remplacée par l'hypothèse que cette vitesse est liée aux variations du champ de gravitation. Dès lors, la théorie de la relativité que nous développons ici, joue le rôle de *deuxième approximation* (la cinématique classique étant une *première approximation*) et correspond au cas où le champ de gravitation est sensiblement uniforme. Pour tenir compte des variations de ce champ, une *troisième* approximation est nécessaire. [*Voir* EINSTEIN, *Entwurf einer verallgemeinerter Relativitätstheorie und einer Theorie der Gravitation* (*Zeitschrift für Mathematik und Physik*, t. LXII).]

où

$$X^2 - T^2 = \lambda^2(x^2 - t^2).$$

A l'axe Ot, qui représente le repos ($x = 0$), correspond la droite $X = T \operatorname{th} \varphi$, et à une droite quelconque $x = ut$ qui représente un mouvement uniforme avec la vitesse u, l'axe Ot étant pris comme base, correspond la droite

$$(13) \qquad \frac{X}{T} = \frac{\operatorname{th} \varphi + u}{1 + u \operatorname{th} \varphi},$$

qui représente un mouvement uniforme dont la vitesse est

$$w = \frac{\operatorname{th} \varphi + u}{1 + u \operatorname{th} \varphi},$$

l'axe OT étant pris comme base.

Mais la quantité $v = \operatorname{th} \varphi$ est précisément ce qu'on appelle en cinématique la *vitesse d'entraînement*, c'est-à-dire la vitesse représentée par l'axe Ot, lorsqu'on prend comme base l'axe OT.

La formule (13) devient alors

$$(14) \qquad w = \frac{u + v}{1 + uv}.$$

C'est la formule de composition des vitesses dans la théorie de la relativité. Dans cette formule, u désigne la vitesse relative, c'est-à-dire la vitesse par rapport à la base Ot; v est la vitesse de la base Ot par rapport à la base OT (vitesse d'entraînement) et w est la vitesse résultante par rapport à OT.

Nous voyons que si u et v sont tous deux inférieurs à 1, w est inférieur à 1, car on a

$$1 - w = \frac{(1 - u)(1 - v)}{1 + uv},$$

de même si u et v sont compris entre 0 et -1, w est aussi compris entre 0 et -1.

De deux mouvements, dont les vitesses sont toutes deux inférieures à celle de la lumière, résulte un mouvement jouissant de la même propriété. Nous voyons que le rôle joué en cinématique classique par une vitesse infinie est joué ici par la vitesse de la lumière. Et ceci nous montre bien comment, même en admettant

que la réalité physique est conforme à la théorie de la relativité, les règles de la cinématique ordinaire sont très approchées pour ce qui concerne les vitesses qui sont de l'ordre de quelques millioniémes de celle de la lumière. Cette remarque peut être précisée, en notant que les vitesses u, v, w étant considérées comme infiniment petites du premier ordre, la différence

$$w - (u + v) = (u + v)\frac{(-uv)}{1 + uv}$$

est un infiniment petit du troisième ordre, c'est-à-dire du second ordre par rapport à w [1].

Si l'on pose

$$(15)\qquad \begin{cases} u = \operatorname{th}\alpha \\ v = \operatorname{th}\varphi \\ w = \operatorname{th}\theta, \end{cases}$$

la formule (14) devient

$$(16)\qquad \operatorname{th}\theta = \frac{\operatorname{th}\alpha + \operatorname{th}\varphi}{1 + \operatorname{th}\alpha\operatorname{th}\varphi},$$

c'est-à-dire coïncide avec la formule d'addition des tangentes hyperboliques; on peut donc, moyennant les équations (15), ramener la formule de composition des vitesses à la forme simple

$$\theta = \alpha + \varphi$$

tout à fait analogue à la formule de la cinématique classique.

Nous voyons finalement que les transformations de droites passant par O, et correspondant aux changements du système de comparaison pour les mouvements représentés par ces droites, ne sont autres que les rotations hyperboliques que nous avons étudiées plus haut; les vitesses sont représentées par les tangentes hyperboliques des angles de rotation, et ce sont les angles de rotation eux-mêmes qui s'ajoutent algébriquement dans toute composition de mouvements.

---

(1) La vitesse de la lumière étant d'environ 300 000^{km} par seconde, une vitesse de 300^{m} à la seconde est de l'ordre 10^{-6}; l'erreur du second ordre est donc de 10^{-12}. Elle est inaccessible à la mesure. Or, la vitesse de 300^{m} à la seconde représente à peu près le maximum de ce qui a été réalisé dans les appareils *mécaniques* (moteurs et hélices d'aviation); les vitesses balistiques elles-mêmes ne sont d'ailleurs pas très supérieures.

CHAPITRE IV.

LES DÉPLACEMENTS HYPERBOLIQUES A TROIS OU QUATRE DIMENSIONS ET LEUR APPLICATION A L'ÉTUDE DE LA CINÉMATIQUE DU PRINCIPE DE RELATIVITÉ.

On peut définir un groupe de déplacements hyperboliques dans l'espace à trois dimensions en prenant pour invariant fondamental relatif à deux points la forme quadratique indéfinie :

$$(1) \qquad F = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - (z_1 - z_2)^2.$$

Dans ces conditions, le lieu géométrique des points situés à une distance de l'origine égale à l'unité est l'hyperboloïde (H) représenté par l'équation

$$(2) \qquad x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0,$$

et l'on peut dire que l'unité de longueur que nous prenons sur une droite donnée (Δ) est la longueur du demi-diamètre de (H) parallèle à (Δ) : il y aura donc des droites sur lesquelles l'unité de longueur sera purement imaginaire, mais nous pourrons, s'il y a lieu, adjoindre à l'hyperboloïde (H) son conjugué (H'), ce qui revient à prendre pour distance de deux points la racine carrée du module de la forme F relative à ces deux points.

Si nous étudions la géométrie dans un plan P passant par l'origine, nous aurons une géométrie à points cycliques réels si ce plan coupe le cône (c) asymptote de l'hyperboloïde (H), et une géométrie elliptique si le plan P ne coupe pas le cône. On aura donc, dans le plan $z = 0$, la géométrie euclidienne ordinaire. Enfin, dans un plan tangent au cône (c), on obtiendrait une géométrie *parabolique* à l'étude de laquelle nous ne nous arrêterons pas, malgré l'intérêt qu'elle pourrait présenter.

Déplacements. — Une analyse toute pareille à celle qui a été

faite à propos de l'espace euclidien donnerait pour les déplacements définis par la forme quadratique (1) les formules générales

$$(3)\qquad \begin{cases} x = \alpha + a\,X + b\,Y + c\,Z, \\ y = \alpha' + a'\,X + b'\,Y + c'\,Z, \\ z = \alpha'' + a''\,X + b''\,Y + c''\,Z, \end{cases}$$

où α, α', α'' sont trois constantes arbitraires, et les neuf cosinus, éléments du déterminant

$$\delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix},$$

vérifient les six relations indépendantes

$$(4)\qquad \begin{cases} a^2 + a'^2 - a''^2 = 1, & ab + a'b' - a''b'' = 0, \\ b^2 + b'^2 - b''^2 = 1, & ac + a'c' - a''c'' = 0, \\ c^2 + c'^2 - c''^2 = 1, & bc + b'c' - b''c'' = 0, \end{cases}$$

d'où résultent d'autres relations telles que $\Delta^2 = 1$.

On peut écrire le tableau des neuf cosinus en fonction des trois paramètres $\frac{\lambda}{\rho}$, $\frac{\mu}{\rho}$, $\frac{\nu}{\rho}$, d'Olinde Rodrigues, de la manière suivante :

$$(5)\qquad \begin{cases} \delta a = \lambda^2 - \mu^2 - \nu^2 - \rho^2, \\ \delta a' = 2(\lambda\mu - \nu\rho), \\ \delta a'' = 2(\lambda\nu - \mu\rho), \\ \delta b = 2(\lambda\mu + \nu\rho), \\ \delta b' = -\lambda^2 + \mu^2 - \nu^2 + \rho^2, \\ \delta b'' = 2(\lambda\rho + \mu\nu), \\ \delta c = -2(\lambda\nu + \mu\rho), \\ \delta c' = 2(\lambda\rho - \mu\nu), \\ \delta c'' = -(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \rho^2), \end{cases}$$

avec

$$\delta = \lambda^2 + \mu^2 - \rho^2 - \nu^2.$$

La rotation représentée par les formules

$$(6)\qquad \begin{cases} x = a\,X + b\,Y + c\,Z, \\ y = a'\,X + b'\,Y + c'\,Z, \\ z = a''\,X + b''\,Y + c''\,Z, \end{cases}$$

se réduit à une rotation euclidienne autour de Oz si l'on a :

$$\lambda = 0, \qquad \mu = 0;$$

au contraire, si l'on a

$$\lambda = 0, \qquad \nu = 0,$$

c'est une rotation hyperbolique autour de Oy ; dans tous les cas, tous les points de la droite $\frac{x}{\lambda} = \frac{y}{\mu} = \frac{z}{\nu}$, qui est l'axe de la rotation, sont laissés invariables.

Nous voyons que la géométrie hyperbolique à trois dimensions que nous venons de définir ne diffère de la géométrie ordinaire ni en ce qui concerne les translations, ni en ce qui concerne les rotations autour de Oz. Nous allons voir que cette propriété des déplacements hyperboliques de comprendre certains déplacements euclidiens à un nombre moindre de dimensions, subsiste dans l'espace à quatre dimensions, où l'on pourra en tirer un parti fort utile.

Nous pouvons constituer une géométrie métrique à un nombre quelconque de dimensions en prenant pour point de départ l'invariance d'une certaine forme quadratique par tous les déplacements de cette géométrie. Prenons, en particulier, la forme à trois carrés positifs et un carré négatif (¹)

$$F = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - (t_1 - t_2)^2,$$

dans l'espace à quatre dimensions x, y, z, t.

Il est inutile d'insister sur le détail des changements à apporter aux définitions et aux formules du Chapitre III, relatif à la géométrie quaternaire euclidienne. L'expression générale des déplacements laissant la forme F invariante sera

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= \alpha + a\,X + b\,Y + c\,Z + d\,T,\\ y &= \alpha' + a'\,X + b'\,Y + c'\,Z + d'\,T,\\ z &= \alpha'' + a''\,X + b''\,Y + c''\,Z + d''\,T,\\ t &= \alpha''' + a'''\,X + b'''\,Y + c'''\,Z + d'''\,T,\end{aligned}\right.$$

et les seize cosinus, éléments du déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \\ a''' & b''' & c''' & d''' \end{vmatrix}.$$

(¹) Dans l'espace à quatre dimensions, on pourrait considérer aussi une forme à deux carrés positifs et deux carrés négatifs ; cette géométrie ne présente pas d'intérêt pour notre but.

vérifient les équations indépendantes, au nombre de 10,

$$(8)\quad \begin{cases} a^2 + a'^2 + a''^2 - a'''^2 = 1, \\ b^2 + b'^2 + b''^2 - b'''^2 = 1, \\ c^2 + c'^2 + c''^2 - c'''^2 = 1, \\ d^2 + d'^2 + d''^2 - d'''^2 = -1, \end{cases}$$

$$(8\ bis)\quad \begin{cases} ab + a'b' + a''b'' - a'''b''' = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

On démontrerait, en suivant pas à pas l'analyse déjà faite, que tout déplacement tel que (7) peut se ramener à deux rotations : l'une euclidienne, l'autre hyperbolique, effectuées dans deux plans complètement rectangulaires (le mot *rectangulaire* étant pris évidemment au sens des angles définis par la forme quadratique F).

Les expressions des seize cosinus en fonction des quantités α, β, γ, λ, μ, ν sont à peu près les mêmes : les six paramètres α, β, γ, λ, μ, ν sont liés, au lieu de la relation (11) (Chap. III) par la relation suivante

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \lambda^2 - \mu^2 - \nu^2 = -1.$$

Voici ce que devient alors le Tableau des seize cosinus :

$$(9)\quad \begin{cases} (\mu^2 + \nu^2 - \alpha^2)\cos\varphi - (\lambda^2 - \beta^2 - \gamma^2)\,\mathrm{ch}\,\theta, \\ -(\alpha\beta + \lambda\mu)(\cos\varphi - \mathrm{ch}\,\theta) - \nu\sin\varphi + \gamma\,\mathrm{sh}\,\theta, \\ -(\alpha\gamma + \lambda\nu)(\cos\varphi - \mathrm{ch}\,\theta) + \mu\sin\varphi - \beta\,\mathrm{sh}\,\theta, \\ \quad(\gamma\mu - \beta\nu)(\cos\varphi - \mathrm{ch}\,\theta) + \alpha\sin\varphi - \lambda\,\mathrm{sh}\,\theta; \\[1ex] -(\alpha\beta + \lambda\mu)(\cos\varphi - \mathrm{ch}\,\theta) - \nu\sin\varphi - \gamma\,\mathrm{sh}\,\theta, \\ (\lambda^2 + \nu^2 - \beta^2)\cos\varphi - (\mu^2 - \alpha^2 - \gamma^2)\,\mathrm{ch}\,\theta, \\ -(\beta\gamma + \mu\nu)(\cos\varphi - \mathrm{ch}\,\theta) + \lambda\sin\varphi - \alpha\,\mathrm{sh}\,\theta, \\ \quad(\alpha\nu - \lambda\gamma)(\cos\varphi - \mathrm{ch}\,\theta) + \beta\sin\varphi - \mu\,\mathrm{sh}\,\theta; \\[1ex] -(\alpha\gamma + \lambda\nu)(\cos\varphi - \mathrm{ch}\,\theta) - \mu\sin\varphi + \beta\,\mathrm{sh}\,\theta, \\ -(\beta\gamma + \mu\nu)(\cos\varphi - \mathrm{ch}\,\theta) - \lambda\sin\varphi - \alpha\,\mathrm{sh}\,\theta, \\ (\lambda^2 - \mu^2 - \gamma^2)\cos\varphi - (\nu^2 - \alpha^2 - \beta^2)\,\mathrm{ch}\,\theta, \\ \quad(\beta\lambda - \alpha\mu)(\cos\varphi - \mathrm{ch}\,\theta) + \gamma\sin\varphi - \nu\,\mathrm{sh}\,\theta; \\[1ex] \quad(\beta\nu - \gamma\mu)(\cos\varphi - \mathrm{ch}\,\theta) + \alpha\sin\varphi - \lambda\,\mathrm{sh}\,\theta, \\ \quad(\lambda\gamma - \alpha\nu)(\cos\varphi - \mathrm{ch}\,\theta) + \beta\sin\varphi - \mu\,\mathrm{sh}\,\theta, \\ \quad(\alpha\mu - \beta\lambda)(\cos\varphi - \mathrm{ch}\,\theta) + \gamma\sin\varphi - \nu\,\mathrm{sh}\,\theta, \\ -(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)\cos\varphi + (\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2)\,\mathrm{ch}\,\theta). \end{cases}$$

C'est dans le but de reprendre, par une méthode géométrique,

l'étude de quelques points de la théorie physique de la relativité, que nous avons introduit cette géométrie hyperbolique à quatre dimensions ; nous allons voir, en effet, qu'elle fournit une représentation commode de l'*Univers*.

C'est Minkowski qui a proposé d'introduire dans la Science la notion générale de l'Univers, synthèse des deux notions fondamentales de l'espace et du temps. L'Univers, au sens de Minkowski, peut être considéré comme l'ensemble des événements qui ont lieu dans l'espace et dans le temps, un événement consistant dans le fait qu'à un instant donné t, en un point M de coordonnées x, y, z, il se passe une chose déterminée.

Cet Univers est donc une multiplicité à quatre dimensions, et nous pouvons considérer la Physique générale, qui est l'étude de l'Univers, comme une géométrie à quatre dimensions. C'est en utilisant cette représentation, sous une forme assez voisine de celle adoptée par Minkowski lui-même, que nous allons reprendre, à partir du principe de relativité, l'étude du groupe de transformations des équations de l'électromagnétisme. Nous nous occuperons ensuite de l'important problème de la composition des vitesses.

Nous ne nous astreindrons pas à faire une exposition purement logique, dans laquelle le nombre des axiomes est réduit au minimum. Sans contester l'intérêt philosophique que peut avoir une telle méthode pour une science abstraite, telle que l'arithmétique ou la géométrie, il serait très artificiel de procéder ainsi dans une question où intervient une notion telle que celle du temps, qu'il s'agit précisément de critiquer, de manière à en remplacer la notion vulgaire par une conception assez différente. Tant que cette conception ne sera pas physiquement éclaircie, l'introduction d'axiomes abstraits ne pourra que masquer les difficultés au lieu de les résoudre. Il semble donc préférable de ne pas craindre d'introduire des axiomes surabondants, dont l'absence de contradiction résultera du développement même de la théorie.

Dans le mode d'exposition de Minkowski, le temps est remplacé par la variable imaginaire $x_4 = it$; l'espace auxiliaire à quatre dimensions

$$x_1 = x,$$
$$x_2 = y,$$
$$x_3 = z,$$
$$x_4 = it,$$

est un espace euclidien. Nous conservons la variable t; nos quatre coordonnées x, y, z, t représenteront les dimensions d'un espace fictif (E'), qui ne sera pas euclidien, et dont nous allons essayer de mettre en lumière certains caractères.

Un mouvement de translation rectiligne et uniforme de l'espace réel (E) peut être représenté par les équations

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{t}{d}, \tag{10}$$

relatives au mouvement du point qui passe à l'origine des coordonnées à l'instant zéro. La vitesse W du mouvement représenté par les équations (10) est donnée par la formule

$$W^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{d^2}, \tag{11}$$

d étant supposé différent de zero.

Soit, dans l'espace réel (A) le système de comparaison actuel, dans lequel sont pris les axes Ox, Oy, Oz, et soit (B) un nouveau système de comparaison, animé, par rapport à (A), du mouvement de translation rectiligne et uniforme défini par les formules (11). Nous ferons l'hypothèse que tout mouvement de translation rectiligne et uniforme par rapport au système (A) est un mouvement de la même nature par rapport à (B), ou qu'en général, le mouvement résultant de la composition de deux mouvements de translation rectiligne et uniforme est un mouvement de la même nature.

Soit donc (T) un certain mouvement de translation tel que les équations relatives au point de l'espace (E) qui passe en O à l'instant $t = 0$ sont

$$\frac{x}{a'} = \frac{y}{b'} = \frac{z}{c'} = \frac{t}{1}; \tag{12}$$

à ce mouvement, rapporté au système (A), correspond ainsi une certaine droite (Δ) de l'espace (E'), issue de l'origine des coordonnées $Oxyzt$; si nous remplaçons le système (A) par le système (B), à cette droite (Δ) nous faisons correspondre une droite (Δ'). A tout changement du système de comparaison tel que le mouvement d'entrainement soit une translation uniforme correspond, dans l'espace (E'), une certaine transformation ponctuelle;

et nous savons que cette transformation change les droites issues de l'origine en droites issues de l'origine.

Nous pouvons donc admettre que c'est une transformation linéaire, représentée par des formules telles que

$$(13)\quad \begin{cases} X = \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta t, \\ Y = \alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \delta' t, \\ Z = \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z + \delta'' t, \\ T = \alpha''' x + \beta''' y + \gamma''' z + \delta''' t. \end{cases}$$

On peut remarquer qu'en cinématique classique ces formules se réduisent à la forme

$$(14)\quad \begin{cases} X = \lambda x + \mu y + \nu z + a' t, \\ Y = \lambda' x + \mu' y + \nu' z + b' t, \\ Z = \lambda'' x + \mu'' y + \nu'' z + c' t, \\ T = t, \end{cases}$$

où λ, μ, ν, λ', μ', ν', λ'', μ'', ν'' sont les éléments d'un déterminant orthogonal.

Voyons quelle forme générale il conviendra de donner aux formules (13) si nous introduisons le principe de relativité, c'est-à-dire si nous admettons avec Einstein que tout mouvement s'effectuant avec la vitesse de la lumière par rapport à un certain groupe d'observateurs, conservera la même vitesse par rapport à un autre groupe d'observateurs quelconque, mobile par rapport au premier [1].

Prenons cette vitesse invariable pour unité. Les droites (Δ) qui représentent des mouvements de vitesse égale à 1 devront conserver ce caractère par toutes les transformations (13). Or, si x, y, z, t sont les coordonnées d'un point M d'une telle droite, on a

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{t^2} = 1,$$

par suite, l'hypothèse

$$x^2 + y^2 + z^2 - t^2 = 0$$

doit entraîner le résultat

$$X^2 + Y^2 + Z^2 - T^2 = 0.$$

---

(1) *Voir* la note au bas de la page 35.

Nous admettrons dans ce qui suit que non seulement cette condition est réalisée, mais qu'on a nécessairement

$$(15) \qquad x^2+y^2+z^2-t^2 = X^2+Y^2+Z^2-T^2;$$

c'est en remarquant que, dans le cas où les axes (B) sont invariables par rapport à (A), les formules (13) doivent assurer l'égalité des distances $x^2+y^2+z^2$ et $X^2+Y^2+Z^2$ que nous sommes conduits à faire pour le cas général cette nouvelle hypothèse.

Dans ces conditions, les transformations homographiques (13) se réduisent aux changements d'axes de l'espace hyperbolique considérés au commencement de ce Chapitre. C'est donc dans cet espace hyperbolique qu'il faut voir la représentation de l'Univers de Minkowski conforme à la théorie de la relativité; le groupe de substitutions ainsi défini, et qui admet pour invariant fondamental la forme $x^2+y^2+z^2-t^2$ coïncide avec celui qu'on rencontre dans la théorie électromagnétique, et qui est connu sous le nom de *groupe de Lorenz*; ce groupe est à six paramètres indépendants, et l'on peut utiliser soit les formules de Cayley, soit les formules du Tableau (9) pour la représentation d'une substitution de ce groupe.

Abordons maintenant l'étude du problème précis de la composition des vitesses :

Le fait de prendre le système (B) comme nouveau système de comparaison revient à choisir comme nouvel axe OT la droite de l'espace (E) représentée par les équations (10). Les autres axes nouveaux OX, OY, OZ ne sont pas complètement déterminés; prenons-les de la manière la plus simple, c'est-à-dire

OX dans le plan xOy,

OY dans l'hyperplan $Oxyz$.

Utilisant alors les relations (8) et (8 *bis*) entre les seize cosinus, nous sommes conduits par un calcul facile [1] au Tableau suivant

---

[1] Les expressions inscrites dans la dernière colonne du Tableau (16) sont immédiatement connues; on calcule successivement la première, la deuxième et la troisième colonnes en utilisant les relations (8) et (8 *bis*), ainsi que le fait que OX est dans le plan xOy et OY dans l'hyperplan $Oxyz$.

de ces coefficients :

(16)	OX	OY	OZ	OT
Ox	$\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$	$\frac{ac}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$	$\frac{ad}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$	a
Oy	$\frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}}$	$\frac{bc}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$	$\frac{bd}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$	b
Oz	0	$\frac{-(a^2+b^2)}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$	$\frac{cd}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$	c
Ot	0	0	$\sqrt{a^2+b^2+c^2}$	d

où nous supposons a, b, c, d, qui n'ont été jusqu'ici définis qu'à un facteur commun près [1], choisis de manière que

$$a^2+b^2+c^2-d^2=-1$$

ce qui est évidemment possible si la vitesse W est inférieure à l'unité, ce que nous supposerons; il ne paraît pas possible, dans la cinématique du principe de relativité, d'admettre l'existence de mouvements s'effectuant avec une vitesse supérieure à celle de la lumière : l'existence d'un tel phénomène, en effet, ne serait pas compatible avec la notion même de causalité.

On peut alors écrire, d'après l'équation (11),

(17) $$d^2=\frac{1}{1-W^2}.$$

Cela posé, soit (C) un certain système, animé par rapport à (A) de la translation (T) définie par les formules (12) : proposons-nous de trouver le mouvement de (C) par rapport à (B), et, d'une manière plus précise, de calculer la vitesse de ce mouvement.

Les équations (12) doivent donner les suivantes :

(18) $$\frac{X}{a_1}=\frac{Y}{b_1}=\frac{Z}{c_1}=\frac{T}{d_1},$$

---

[1] Car les équations (16) ne sont pas modifiées quand on y remplace a, b, c, d par des quantités proportionnelles.

avec

$$a_1 = a' \cos Ox.OX + b' \cos Oy.OX,$$

$$b_1 = a' \cos Ox.OY + b' \cos Oy.OY + c' \cos Oz.OY,$$

$$c_1 = a' \cos Ox.OZ + b' \cos Oy.OZ + c' \cos Oz.OZ + \cos Oz.OT,$$

$$d_1 = a' \cos Ox.OT + b' \cos Oy.OT + c' \cos Oz.OT + \cos Ot.OT,$$

c'est-à-dire

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} a_1 &= \frac{ba' - ab'}{\sqrt{a^2 + b^2}},\\ b_1 &= \frac{a(ca' - ac') + b(cb' - bc')}{\sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},\\ c_1 &= \frac{d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\left(aa' + bb' + cc' + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{d}\right),\\ d_1 &= aa' - bb' - cc' - d. \end{aligned}\right.$$

relations qui permettent d'écrire

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 - d_1^2 = a'^2 + b'^2 + c'^2 - 1.$$

Dès lors, si nous désignons par V la vitesse de (C) par rapport à (A) et par U la vitesse de (C) par rapport à (B), nous pouvons calculer U en fonction de V et W.

Nous avons, en effet,

$$U^2 = \frac{a_1'^2 + b_1'^2 + c_1'^2}{d_1^2}$$

et, par suite,

$$d_1^2(U^2 - 1) = a_1'^2 + b_1'^2 + c_1'^2 - d_1^2 = a'^2 + b'^2 + c'^2 - 1 = V^2 - 1.$$

Mais la quatrième formule (19), donne

$$d_1' = d(1 - V_x W_x - V_y W_y - V_z W_z),$$

et si θ désigne l'angle, dans l'espace réel, des vecteurs V et W, nous avons

$$d_1^2 = d^2(1 - VW\cos\theta)^2,$$

d'où, par comparaison,

$$(20)\qquad 1 - U^2 = \frac{(1 - V^2)(1 - W^2)}{(1 - VW\cos\theta)^2}.$$

Telle est la formule de la composition des vitesses dans la ciné-

matique du principe de relativité ; nous l'écrirons aussi

$$U^2 = \frac{V^2 + W^2 + 2VW\cos\theta - V^2W^2\sin^2\theta}{(1 + VW\cos\theta)^2}.$$

Nous voyons qu'en prenant V *et* W excessivement petits par rapport à l'unité, ce qui est le cas dans tous les problèmes de Mécanique pure, la formule se réduit à celle de la Mécanique classique. La formule (21) montre, d'autre part, que U est inférieur à l'unité si V et W le sont, quelque voisins d'ailleurs que V et W puissent être de 1 ; cela signifie physiquement que la vitesse résultante de deux vitesses inférieures à celle de la lumière est inférieure à la vitesse de la lumière. Ces deux résultats sont d'une importance considérable.

Reprenons maintenant les expressions du Tableau (16). En vertu de la relation

$$a^2 + b^2 + c^2 - d^2 = -1,$$

nous pouvons poser

$$d = \operatorname{ch}\lambda,$$

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \operatorname{sh}\lambda,$$

et nous avons alors

$$W = \operatorname{th}\lambda.$$

Utilisons également les deux paramètres θ et φ définis par les relations

$$\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos\varphi,$$

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin\varphi$$

et

$$\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \cos\theta,$$

$$\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \sin\theta.$$

Le Tableau des seize cosinus, en fonction des trois paramètres φ,

θ et λ, devient alors

(21)

	X	Y	Z	T
x	$\cos\varphi$	$\sin\varphi\cos\theta$	$\sin\varphi\sin\theta\,\mathrm{ch}\,\lambda$	$\sin\varphi\sin\theta\,\mathrm{sh}\,\lambda$
y	$-\sin\varphi$	$\cos\varphi\cos\theta$	$\cos\varphi\sin\theta\,\mathrm{ch}\,\lambda$	$\cos\varphi\sin\theta\,\mathrm{sh}\,\lambda$
z	0	$-\sin\theta$	$\cos\theta\,\mathrm{ch}\,\lambda$	$\cos\theta\,\mathrm{sh}\,\lambda$
t	0	0	$\mathrm{sh}\,\lambda$	$\mathrm{ch}\,\lambda$

Si l'on avait $W = 0$, c'est-à-dire si $\mathrm{ch}\,\lambda = 1$, la substitution linéaire se réduirait à la substitution exprimant un changement de coordonnées rectangulaires.

Dans l'espace à quatre dimensions (E'), l'hypothèse précédente revient à remplacer les axes OXYZT par les axes $OX_1Y_1Z_1T_1$, OX_1 et OY_1 coïncidant avec OX et OY, mais le système OZ_1, OT_1, pris dans le plan OZT, fait avec le système OZ, OT un angle hyperbolique dont le cosinus est $\mathrm{ch}\,\lambda$. Voici à quels phénomènes ce changement correspond : les longueurs portées dans l'espace (E) sur les axes OX, OY, perpendiculaires au mouvement, sont inaltérées; celles qui sont dans le sens du mouvement sont multipliées, du fait du mouvement, par le facteur $\mathrm{ch}\,\lambda$; une longueur ayant la direction du mouvement est plus courte pour des observateurs au repos par rapport à (A) que pour des observateurs liés à (B); c'est le phénomène de la *contraction de Lorenz*. Nous sommes également conduits à admettre ce rapport $\mathrm{ch}\,\lambda$ entre les temps des deux groupes d'observateurs, et c'est ici la notion du *temps ropre* qu'on rencontre dans la cinématique de Minkowski.

Ces dernières conclusions nous montrent à quel point les notions de l'espace et du temps absolus de la Mécanique rationnelle diffèrent de celles que nous suggère l'étude de la théorie de la relativité.

Si nous revenons à la formule proprement dite d'addition des vitesses, et si nous prenons les nouvelles variables α, β, γ définies en posant

$$(22)\qquad \left\{\begin{aligned} u &= \mathrm{th}\,\alpha,\\ v &= \mathrm{th}\,\beta,\\ w &= \mathrm{th}\,\gamma.\end{aligned}\right.$$

nous aurons

$$1 - u^2 = \frac{1}{\text{ch}^2 \alpha},$$

$$1 - v^2 = \frac{1}{\text{ch}^2 \beta},$$

$$1 - w^2 = \frac{1}{\text{ch}^2 \gamma},$$

et la relation entre α, β, γ s'écrit

$$(23) \qquad \text{ch}\,\alpha = \text{ch}\,\beta\,\text{ch}\,\gamma - \text{sh}\,\beta\,\text{sh}\,\gamma \cos\theta.$$

On reconnaît là l'une des relations fondamentales entre les longueurs des côtés, et les angles, d'un triangle géodésique tracé sur une surface à courbure totale constante négative, ici égale à — 1. Ainsi le triangle formé par les trois vecteurs-vitesses :

(U) vitesse de (B) par rapport à (C),
(V) vitesse de (C) par rapport à (A),
(W) vitesse de (A) par rapport à (B),

correspond, en vertu des formules (22), à un triangle pseudosphérique bien déterminé. Le résultat exprimé par la formule (23) a été indiqué par M. Sommerfeld, en 1909, dans la *Physikalische Zeitschrift*.

Notion de l'espace cinématique. — A tout mouvement (M) de translation rectiligne et uniforme nous pouvons faire correspondre l'extrémité M d'un vecteur ayant une origine fixe O, et équipollent à la vitesse de ce mouvement. Le point O est alors le point représentatif du repos. L'espace des points-vitesses tels que M peut s'appeler *espace des vitesses* ou *espace cinématique*.

La considération de l'espace cinématique permet une représentation simple du résultat de tout problème de changement du système de comparaison. Si nous rapportons le mouvement du système (M) à un système (A) représenté par le point a, c'est le vecteur am, au lieu de Om, qui donnera la vitesse du mouvement (M); les points de l'espace cinématique conservent donc leur signification, en prenant pour point représentatif du repos celui qui convient. Dans la cinématique classique, nous avons là une image de la composition des vitesses, si l'espace cinématique est l'espace euclidien ordinaire.

Mais dans la théorie de la relativité, si nous voulons utiliser cette représentation de la composition des mouvements, nous sommes conduits à utiliser un espace à courbure totale égale à -1, sur les droites duquel nous représenterons nos vitesses en portant les longueurs α, β, γ, ..., de manière à avoir les triangles géodésiques étudiés plus haut. C'est ce que nous pouvons exprimer en disant que l'espace cinématique qui correspond à la mécanique du principe de relativité n'est plus euclidien, c'est un espace de Lobatschewski.

Le rayon de courbure de cet espace est la vitesse de la lumière; ce résultat s'explique par le caractère d'*unité absolue* que joue ce nombre dans les théories physiques nouvelles. On peut dire que l'espace cinématique des géomètres est euclidien parce qu'il n'existe en Géométrie aucune longueur jouissant de propriétés spéciales; et, comme toujours, nous trouvons que la vitesse de la lumière joue dans la théorie de la relativité le rôle d'une vitesse infinie en Mécanique rationnelle.

Dans le cas d'un système dont le mouvement (M) a une vitesse variable, soit en grandeur, soit en direction, il lui correspond une certaine courbe dans l'espace cinématique; cette courbe est l'hodographe en Mécanique rationnelle; cette représentation peut être utilisée pour l'étude des accélérations et de la Dynamique.

LA THÉORIE DE LA RELATIVITÉ ET LA CINÉMATIQUE [1].

En étudiant géométriquement la théorie de la relativité, sous la forme que lui a donnée le regretté Minkowski, j'ai été conduit à des conséquences que je voudrais brièvement résumer [2].

---

[1] Ce qui suit, jusqu'à la fin du Chapitre IV, est la reproduction d'une Note publiée dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (t. 156, 20 janvier 1913, p. 215); on y a laissé subsister quelques phrases qui font double emploi avec la rédaction de M. Deltheil, car leur suppression aurait rompu la suite des idées.

[2] M. Paul Langevin, à qui j'ai communiqué les résultats que j'avais obtenus, m'a appris que l'une des formules auxquelles je suis arrivé a été indiquée par M. Sommerfeld dans la *Physikalische Zeitschrift*, dès 1909. Mais il ne semble pas que la notion d'*espace cinématique*, sous la forme précise que je lui donne, ait été mise en évidence. On ne la trouve pas, en tout cas, dans les exposés synthétiques tels que celui de M. Laue (*Das Relativitätsprincip*, 1911) ou celui de MM. E.-B. Wilson et G.-N. Lewis (*Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences*, novembre 1912), postérieurs à la publication de M. Sommerfeld. *Voir* la Note VI.

1. Considérons trois systèmes (A), (B), (C), respectivement animés de mouvements de translation uniformes. Désignons par γ la vitesse de (B) par rapport à (A), vitesse mesurée par des observateurs liés à (A), en prenant pour unité la vitesse de la lumière (pour ces observateurs); nous désignerons de même par β la vitesse de (C) par rapport à (A), et enfin par A l'angle des directions de γ et de β. Nous définirons de même la vitesse α et les angles B et C. On doit observer que la théorie de la relativité entraîne que la vitesse de (A) par rapport à (B), mesurée dans (B), est égale au nombre γ que nous avons défini. Nous poserons, suivant une transformation bien connue : $\alpha = \operatorname{th} a$, $\beta = \operatorname{th} b$, $\gamma = \operatorname{th} c$. Les nombres positifs a, b, c, sont ce qu'on peut appeler les vitesses *vraies*.

Cela posé, la formule d'addition des vitesses que l'on doit à M. Einstein exprime que les relations entre a, b, c, A, B, C sont précisément celles qui lient, sur une surface à courbure constante négative, les côtés et les angles d'un triangle. La formule de M. Einstein donne aisément l'une de ces relations [1] et la parfaite symétrie de nos définitions entraîne les deux autres; la connaissance de b, c, A permet ainsi de connaître, non seulement a, *mais les angles* B *et* C.

2. Étant donnés divers systèmes animés de mouvements de translation uniformes, on peut représenter leurs vitesses par les extrémités de vecteurs ayant comme origine commune un point O qui correspond au système que l'on suppose au repos. En cinématique classique, on peut prendre comme origine des vecteurs-vitesses un autre point quelconque A, correspondant à un système (A) regardé comme fixe; *les vitesses des autres systèmes sont représentées par les mêmes points*. Il est naturel d'appeler *espace cinématique* l'espace des *points-vitesses* tels que A; en cinématique classique, l'espace cinématique est l'espace euclidien.

Le principe de relativité correspond à l'hypothèse que *l'espace cinématique est un espace à courbure constante négative*, l'espace de Lobatschewski et Bolyai. La valeur du rayon de courbure est la vitesse de la lumière. On peut observer que, dire que l'espace

---

[1] C'est cette première relation qu'a donnée M. Sommerfeld.

des géomètres est euclidien, c'est dire qu'il n'y a aucune longueur privilégiée, aucune unité absolue de longueur. Or, les théories physiques conduisent à admettre que la vitesse de la lumière est une unité absolue de vitesse. Il est donc assez naturel que la courbure de l'espace cinématique soit en relation avec cette unité.

3. La notion d'espace cinématique conduit à représenter par un point un système animé d'une translation uniforme et par une courbe un système animé d'une translation variable; on est ainsi amené à présenter, sous une forme géométrique très simple, la théorie des accélérations intrinsèques et par suite la dynamique; mais je me bornerai aujourd'hui à l'étude purement *cinématique* du mouvement, dans laquelle la définition du temps n'intervient pas explicitement ([1]).

4. Si l'on considère deux points A et B voisins sur la surface d'une sphère, il y a une certaine difficulté à définir les directions parallèles dans les plans tangents en A et en B, puisque ces plans ne sont pas eux-mêmes parallèles. On est conduit cependant, si les points A et B sont très voisins, à regarder les tangentes en A et B à l'arc de grand cercle AB et les perpendiculaires à ces tangentes comme formant deux systèmes correspondants d'axes rectangulaires, par rapport auxquels on peut définir la correspondance entre les directions en A et les directions en B. Si le point A décrit une courbe fermée ou, pour plus de netteté, un polygone dont les côtés sont de très petits arcs de grand cercle, on pourra ainsi définir de proche en proche la correspondance entre les directions qui seront dites *parallèles*. On sait que, lorsqu'on sera revenu au point de départ, les axes, supposés à chaque instant parallèles aux axes au point voisin, auront en réalité tourné d'un angle égal à la surface du polygone sphérique (le carré du rayon de la sphère étant pris comme unité de surface). Le même phénomène se produit lorsqu'on veut définir les directions des vitesses aux divers points de l'espace cinématique. En deux points très voisins A et B, c'est-à-dire dans deux systèmes (A) et (B) dont le mouvement relatif est une translation uniforme de vitesse très faible, on regardera comme axes parallèles les trièdres définis par la direction de

([1]) La considération des triangles pseudo sphériques rectangles, pour lesquels on a $\text{ch}\, a = \text{ch}\, b\, \text{ch}\, c$, permet de simplifier beaucoup les calculs relatifs au temps propre, notamment dans l'étude des mouvements uniformément accélérés.

la vitesse relative et par deux plans rectangulaires contenant cette direction. Il semble que ce soit là le seul moyen, pour un observateur lié à un système animé d'un mouvement non uniforme de *conserver la notion de la direction.*

On est ainsi conduit à la conséquence suivante : si le point-vitesse d'un système (A) décrit un contour fermé (que nous supposons plan, pour simplifier), les axes restés fixes pour l'observateur lié à (A) se trouvent, pour un observateur dont la vitesse a été toujours égale à la vitesse initiale et finale de (A), avoir tourné d'un angle égal à l'aire du contour. Cet effet du second ordre pourrait se déduire de la contraction de Lorentz à laquelle la notion d'espace cinématique est équivalente; il revient à ceci : *un système que les observateurs liés au système croient constamment en translation peut paraître animé d'un mouvement de rotation à des observateurs extérieurs.*

Cet effet ne sera, bien entendu, sensible que pour des mouvements périodiques très rapides. Prenons comme unité de longueur le centimètre, l'unité de temps étant telle que la vitesse de la lumière soit égale à l'unité, et considérons un mouvement défini par les équations $x = A\cos\omega t$, $y = A\sin\omega t$. Les vitesses sont de l'ordre de $A\omega$ et leurs carrés de l'ordre de $A^2\omega^2$; tel est l'ordre de grandeur de l'angle de rotation pour une période; la vitesse angulaire, c'est-à-dire l'angle de rotation par unité de temps, sera de l'ordre de $A^2\omega^3$. Pour les vibrations lumineuses, ω est de l'ordre de 10^5 (puisque, avec nos unités, les périodes sont égales aux longueurs d'onde); même avec des élongations A très petites, de l'ordre de 10^{-12}, on obtient une vitesse angulaire 10^{-9}, c'est-à-dire 30 tours par seconde [1].

Dans l'hypothèse moléculaire, il n'y a pas lieu de se préoccuper de la théorie de la rotation du corps solide, mais seulement des mouvements des particules qui le composent. Il est assez curieux d'observer que la théorie de la relativité entraîne la conséquence que les mouvements de rotation qui apparaissent aux observateurs au repos peuvent être expliqués par des hypothèses dans lesquelles les mouvements intrinsèques seraient exclusivement des mouvements de translation.

---

[1] Dans ces calculs approximatifs, on a négligé les facteurs tels que 2π.

CHAPITRE V.

FONCTIONS D'UN TRÈS GRAND NOMBRE DE VARIABLES : AIRES ET VOLUMES EN GÉOMÉTRIE A 10^{24} DIMENSIONS.

Les progrès récents des Sciences physiques ont montré le rôle croissant que tend à jouer en Physique mathématique l'étude du discontinu : à côté des fonctions qu'on rencontre dans le Calcul fonctionnel, fonctions de lignes, de surfaces ou de volumes, il est utile de s'occuper de fonctions d'une autre catégorie, celles qui dépendent d'un nombre très grand de variables indépendantes, ce nombre restant tout de même fini. Nous nous bornerons aux plus simples de ces fonctions, c'est-à-dire aux fonctions algébriques, limitées même aux deux premiers degrés, et parmi leurs propriétés, nous chercherons à mettre en évidence celles qui tiennent au fait même que le nombre des variables est très grand. Dans ces conditions, il y aura avantage à donner à cette étude un caractère géométrique; nous étudierons certaines propriétés des êtres géométriques les plus simples d'un espace à m dimensions; comme il importe avant tout de fixer les idées sur le sens que nous nous proposons de donner ici à l'expression « nombre très grand de variables », nous prendrons m de l'ordre de 10^{24} : c'est à ce nombre ou à des nombres voisins que conduisent les évaluations du nombre des molécules et du nombre des paramètres dont elles dépendent. (*Voir*, par exemple, JEAN PERRIN, *Les atomes*; Paris, Alcan, 1913.)

Un point de l'espace (E) sera un système de valeurs données aux variables $x_1, x_2, \ldots, x_m$, et la géométrie de cet espace sera l'étude de l'ensemble des transformations qui laissent invariable une forme quadratique fondamentale donnée

$$F(x_1 - y_1, x_2 - y_2, \ldots, x_m - y_m),$$

relative à deux points quelconques (x), (y). Nous prendrons ici la

forme la plus simple, et nous choisirons la géométrie métrique euclidienne, la distance de deux points A(x) et B(y) étant définie par l'équation

$$\overline{AB}^2 = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_m - y_m)^2.$$

Si A(x), B(y), C(z) sont trois points donnés, nous avons

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\,AB.AC\cos A,$$

en posant

$$\cos A = \frac{\Sigma(x_1 - y_1)(x_1 - z_1)}{AB.AC};$$

et les déplacements définis comme conservant les distances, conserveront aussi les angles. Il n'y a pas lieu de s'étendre ici sur l'expression générale et sur l'étude des propriétés des déplacements; cela n'ajouterait que peu de chose aux résultats obtenus dans les Chapitres précédents pour les géométries, euclidiennes ou hyperboliques, à deux, trois ou quatre dimensions.

Multiplicités linéaires. — Deux points A(x), B(y) définissent une droite : cette droite est le lieu des points C(z) tels qu'on ait symboliquement

$$z = x + \lambda(y - x),$$

trois points A(x), B(y), C(z) définissent une multiplicité linéaire à deux paramètres, qui est constituée par l'ensemble des points D(u) tels que

$$u = x + \lambda(y - x) + \mu(z - x) + \ldots;$$

et d'une manière générale, K points définissent une multiplicité linéaire à K — 1 paramètres, cette définition étant valable pour toutes les valeurs de K comprises entre 2 et m.

Il y a intérêt, au point de vue de la géométrie métrique, à définir des distances de points et de multiplicités linéaires. Soit A un point fixe, et (M) une multiplicité linéaire; on appellera *distance du point* A à la multiplicité M le minimum de la distance AP, P étant un point de la multiplicité (M).

De même, si (M) et (M') sont deux multiplicités linéaires à moins de m — 1 paramètres, on pourra définir la distance de (M)

à (M′) comme la plus courte distance d'un point de M à un point de M′.

Ces définitions sont des extensions de celles de la distance d'un point à une droite ou à un plan, et de la plus courte distance de deux droites. Nous allons voir, en étudiant un ou deux exemples très simples, qu'elles conduisent toujours à un nombre unique qu'on peut, au surplus, calculer facilement.

Distance de l'origine à une droite. — Soit à chercher le minimum δ^2 de l'expression

$$\rho^2 = \Sigma z_i^2,$$

où

$$z_i = x_i + \lambda(y_i - x_i) = x_i + \mu y_i;$$

nous pouvons écrire

$$\rho^2 = \Sigma(x_i - \mu y_i)^2,$$

et la condition $\frac{d(\rho^2)}{d\mu} = 0$ donne immédiatement

$$\Sigma y_i(x_i - \mu y_i) = 0.$$

Cette relation permet de transformer la relation qui donne ρ^2 et d'écrire

$$\Sigma x_i^2 - \mu \Sigma x_i y_i - \rho^2 = 0.$$

L'élimination de μ donne alors

$$\begin{vmatrix} \Sigma y_i^2 & \Sigma x_i y_i \\ \Sigma x_i y_i & \Sigma x_i^2 - \rho^2 \end{vmatrix} = 0,$$

d'où

$$\delta^2 \Sigma y_i^2 = \Sigma x_i^2 \Sigma y_i^2 - [\Sigma x_i y_i]^2.$$

Distance de l'origine à une multiplicité à trois dimensions. — Il s'agit ici de chercher le minimum δ^2 de l'expression

$$\rho^2 = \Sigma t_i^2,$$

où l'on a

$$t_i = x_i + \lambda y_i + \mu z_i + \nu u_i.$$

Les conditions $\frac{\partial\rho}{\partial\lambda} = 0$, $\frac{\partial\rho}{\partial\mu} = 0$, $\frac{\partial\rho}{\partial\nu} = 0$ donnent les relations

$$(1)\quad \begin{cases} \Sigma y_i[x_i - \lambda y_i + \mu z_i + \nu u_i] = 0, \\ \Sigma z_i[x_i - \lambda y_i + \mu z_i + \nu u_i] = 0, \\ \Sigma u_i[x_i - \lambda y_i + \mu z_i + \nu u_i] = 0. \end{cases}$$

qui permettent d'écrire

$$(2)\qquad \sum x_i(x_i - \lambda y_i - \mu z_i - \nu u_i) - \delta^2 = 0,$$

en vertu du théorème d'Euler sur les fonctions homogènes. L'élimination des paramètres λ, μ, ν entre les équations (1) et (2) donne la relation suivante :

$$(3)\qquad \begin{vmatrix} \sum y_i^2 & \sum y_i z_i & \sum y_i u_i & \sum y_i x_i \\ \sum z_i y_i & \sum z_i^2 & \sum z_i u_i & \sum z_i x_i \\ \sum u_i y_i & \sum u_i z_i & \sum u_i^2 & \sum u_i x_i \\ \sum x_i y_i & \sum x_i z_i & \sum x_i u_i & \sum x_i^2 - \delta^2 \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui permet d'avoir δ^2 comme quotient de deux déterminants.

Des simplifications notables s'introduisent dans la formule (3) si tout ou partie des termes rectangles s'annulent.

Il est naturel de s'occuper d'abord des multiplicités algébriques du premier et du second degré. Dans le cas d'un nombre très considérable de dimensions, on est presque contraint de ne pas aller plus loin, et cela pour deux raisons : d'abord on ne voit pas actuellement à quoi pourrait servir une étude des surfaces de degré supérieur dans cet espace à m dimensions. Ensuite il convient de bien remarquer qu'en hypergéométrie, lorsque le nombre des dimensions devient notable, les combinaisons des variables autres que celles des deux premiers degrés sont tout à fait inextricables. On n'a pas grand secours à esperer, en effet, des transformations homographiques ; si par exemple on remarque que les surfaces du troisième degré dans l'espace à m dimensions dépendent de

$$\frac{m(m^2+6m+11)}{6} \text{ paramètres,}$$

et la transformation homographique la plus générale du même espace dépend seulement de m^2+2m paramètres, on peut ramener ces surfaces à des types dépendant encore de

$$\frac{m(m^2-1)}{6} \text{ paramètres.}$$

Dans le plan, on a ainsi des cubiques types à 1 paramètre, mais déjà pour $m=4$, on a des surfaces dépendant de 15 paramètres, et pour m très grand on voit qu'on n'a pas vraiment de simplifi-

cation appréciable à tirer d'une transformation homographique.

Nous étudierons d'une manière plus particulière la sphère et l'ellipsoïde dans l'espace à m dimensions.

Sphère. — La sphère de rayon R ayant pour centre l'origine des coordonnées est représentée par l'équation

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_m^2 = R^2.$$

Volume de la sphère. — Nous définirons le volume comme étant l'intégrale

$$\underbrace{\int \int \cdots \int}_{m} dx_1\, dx_2\, dx_3 \ldots dx_m.$$

pour le domaine défini par l'inégalité

$$R^2 - x_1^2 - x_2^2 - \ldots - x_n^2 > 0.$$

Pour évaluer ce volume, nous effectuerons un changement de variables classique

$$\begin{aligned}
x_1 &= \rho \cos\varphi_1, \\
x_2 &= \rho \sin\varphi_1 \cos\varphi_2, \\
x_3 &= \rho \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \cos\varphi_3, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_{m-1} &= \rho \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \ldots \sin\varphi_{m-2} \cos\varphi_{m-1}, \\
x_m &= \rho \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \ldots \sin\varphi_{m-2} \sin\varphi_{m-1}
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
0 &\leq \rho \leq R, \\
0 &\leq \varphi_1 \leq \pi, \\
&\ldots\ldots\ldots \\
0 &\leq \varphi_{m-2} \leq \pi, \\
0 &\leq \varphi_{m-1} \leq 2\pi.
\end{aligned}$$

On calcule aisément le jacobien

$$J = \frac{D(x_1, x_2, \ldots, x_m)}{D(\rho, \varphi_1, \ldots, \varphi_{m-1})}.$$

On a

$$
\mathrm{J} = \begin{vmatrix}
\dfrac{x_1}{\rho} & -x_1 \operatorname{tang} \varphi_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
\dfrac{x_2}{\rho} & x_2 \cot \varphi_1 & -x_2 \operatorname{tang} \varphi_2 & 0 & \ldots & 0 \\
\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots & . \\
\dfrac{x_m}{\rho} & x_m \cot \varphi_1 & x_m \cot \varphi_2 & . & \ldots & x_m \cot \varphi_{m-1}
\end{vmatrix}
$$

ou encore

$$
\mathrm{J} = \frac{x_1 x_2 \ldots x_m}{\rho} \begin{vmatrix}
1 & -\operatorname{tang} \varphi_1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\
1 & \cot \varphi_1 & -\operatorname{tang} \varphi_2 & 0 & . & \ldots & \ldots & 0 \\
. & \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & . & . & \ldots & \ldots & . \\
1 & \cot \varphi_1 & \cot \varphi_2 & . & . & . & \cot \varphi_{m-2} & -\operatorname{tang} \varphi_{m-1} \\
1 & \cot \varphi_1 & \ldots\ldots & . & . & \ldots & \cot \varphi_{m-2} & \cot \varphi_{m-1}
\end{vmatrix}
$$

et, après une transformation simple (on ajoute à la seconde colonne la première multipliée par $\operatorname{tang} \varphi_1$, à la troisième la première multipliée par $\operatorname{tang} \varphi_2$, etc.),

$$
(4) \quad \mathrm{J} = \frac{x_1 x_2 \ldots x_m}{\rho \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 \ldots \sin \varphi_{m-1} \cos \varphi_{m-1}} = \rho^{m-1} \sin^{m-2} \varphi_1 \sin^{m-3} \varphi_2 \ldots \sin \varphi_{m-2},
$$

de sorte qu'on a

$$
\begin{aligned}
\mathrm{V} &= \int_0^{\mathrm{R}} \int_0^{\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \rho^{m-1} \sin \varphi_1^{m-2} \sin \varphi_2^{m-3} \ldots \sin \varphi_{m-2}\, d\rho\, d\varphi_1\, d\varphi_2 \ldots d\varphi_{m-1} \\
&= 2\pi \frac{\mathrm{R}^m}{m} \mathrm{J}_1 \mathrm{J}_2 \ldots \mathrm{J}_{m-2},
\end{aligned}
$$

en posant

$$
\mathrm{J}_k = \int_0^{\pi} \sin^k \theta \, d\theta.
$$

On établit immédiatement, au moyen de l'intégration par parties, la formule de récurrence

$$
k \mathrm{J}_k = (k-1) \mathrm{J}_{k-2},
$$

et l'on en déduit les expressions des intégrales J, qui sont différentes suivant la parité de k.

On a

$$
\begin{aligned}
\mathrm{J}_{2p} &= \pi \frac{1.3 \ldots 2p-1}{2.4.6 \ldots 2p}, \\
\mathrm{J}_{2p+1} &= 2 \frac{2.4.6 \ldots 2p}{1.3.5 \ldots 2p-1},
\end{aligned}
$$

et, par conséquent,

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} J_{2p}\,J_{2p+1} &= \frac{2\pi}{2p+1},\\ J_{2p-1}\,J_{2p} &= \frac{\pi}{p}. \end{aligned}\right.$$

D'où les expressions suivantes pour V :

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} V &= \frac{R^{2p+1}}{2p+1}\,\frac{2(2\pi)^p}{1.3.5\ldots 2p-1} &\quad (\text{si } m = 2p+1),\\ V &= \frac{\pi^p R^{2p}}{p!} &\quad (\text{si } m = 2p). \end{aligned}\right.$$

Il est curieux que l'expression du volume de la sphère soit ainsi de deux formes différentes suivant la parité du nombre de dimensions de l'espace que l'on considère. Nous allons voir qu'on peut cependant, en introduisant la fonction Γ, obtenir une expression unique pour ce volume.

Nous rappellerons les propriétés de l'intégrale eulérienne dont nous allons faire usage.

On a, par définition,

$$(7)\qquad \Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-x}\,x^{p-1}\,dx.$$

Une intégration par parties donne immédiatement

$$(8)\qquad \Gamma(p) = (p-1)\,\Gamma(p-1),$$

d'où, si p est un nombre entier,

$$(9)\qquad \Gamma(p) = (p-1)!$$

La formule (8) permet de restreindre à un intervalle d'amplitude égale à l'unité l'étude de la fonction $\Gamma(p)$, et la formule (9) donne la valeur de $\Gamma(p)$ lorsque p est entier. Nous allons chercher une expression de $\Gamma(p)$ pour $p = q + \frac{1}{2}$, q étant entier. Pour cela, il est nécessaire de calculer d'abord

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right).$$

On a

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty \frac{e^{-x}\,dx}{\sqrt{x}},$$

et si l'on pose $x = y^2$, il vient

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^{\infty} e^{-y^2}\,dy.$$

Mais on peut écrire

$$\frac{1}{4}\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = \int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx \int_0^{\infty} e^{-y^2}\,dy$$

$$= \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \int_0^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\rho^2}\rho\,d\rho\,d\omega = \frac{\pi}{4},$$

et finalement nous obtenons

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

On déduit de là, en vertu de la formule (8),

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right),$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} + 2\right) = \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2} + 1\right),$$

. . . .

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} + p\right) = \frac{2p-1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2} + p - 1\right),$$

et en multipliant membre à membre il vient

$$(10) \qquad \Gamma\left(\frac{1}{2} + p\right) = \frac{1.3\ldots(2p-1)}{2^p}\sqrt{\pi},$$

p étant entier.

En vertu des formules (9) et (10), on voit que les deux formules (6) peuvent être réunies en une seule [1]

$$(11) \qquad V_m = \frac{[\pi R^2]^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2} + 1\right)}.$$

Bien entendu, cette formule (11) contient toujours une puissance

[1] Cette formule unique peut être obtenue directement, mais par une voie moins élémentaire que celle que nous avons suivie. *Voir*, par exemple, dans le *Cours d'Analyse* de M. Jordan, t. II, le calcul des intégrales de Dirichlet.

entière de π en facteur. Car lorsque m est impair, le facteur $\sqrt{\pi}$ figure au dénominateur $\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)$.

Si nous comparons maintenant le volume V intérieur à la sphère (S) au volume U limité au domaine

$$-R < x_1 < +R,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$-R < x_m < +R,$$

qui joue ici le rôle du volume du cube circonscrit à la sphère, nous avons

$$U = (2R)^m$$

et nous pouvons écrire

$$\frac{V}{U} = \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)2^m},$$

soit pour $m = 2p$

$$\frac{V}{U} = \left(\frac{\pi}{4}\right)^p \frac{1}{p!},$$

quantité excessivement petite étant donné l'ordre de grandeur de p dans la géométrie que nous étudions.

Ce résultat montre combien notre imagination est incapable de se représenter cette sphère de l'espace à un nombre très grand de dimensions, qui remplit une fraction infiniment petite du volume du « cube » circonscrit. Nous aurons par la suite l'occasion de faire certaines remarques analogues, qui nous permettront d'étudier de plus près la configuration en apparence étrange de cette sphère (S).

Surface de la sphère. — En ce qui concerne la surface S de la sphère, nous pouvons la définir comme la quantité $\frac{dV}{dR}$, ce qui nous donne immédiatement l'expression suivante :

$$S = \frac{dV}{dR} = \frac{2\pi R(\pi R^2)^{\frac{m}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)},$$

en utilisant la formule

$$\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right) = \frac{m}{2}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right).$$

Mais cette définition possède l'inconvénient de ne pouvoir s'appliquer qu'à la sphère. On peut définir dans l'espace l'aire d'une portion de surface comme l'intégrale double

$$\int\int \frac{dx\,dy}{\cos\gamma},$$

γ étant l'angle de la normale à la surface, convenablement dirigée, avec Oz. Et pour l'aire de la sphère on a

$$S = \int\int \frac{R\,dx\,dy}{z}$$

étendue à toute la sphère. C'est cette dernière formule que nous généraliserons; et si nous prenons pour définition de l'aire de la sphère de rayon R dans l'espace à m dimensions l'intégrale multiple

$$\underbrace{\int\int\cdots\int}_{m-1} \frac{R\,dx_1\,dx_2\ldots dx_{m-1}}{x_m}$$

pour le domaine défini par les inégalités

$$R^2 - x_1^2 - \ldots - x_{m-1}^2 > 0$$

et avec

$$x_m = \sqrt{R^2 - x_1^2 - \ldots - x_{m-1}^2}.$$

Un changement de variables tout pareil à celui que nous avons appliqué à l'évaluation du volume V donne

$$S = 2\pi R^{m-1} \int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\cdots\int_0^{\pi} \sin^{m-2}\varphi_1\ldots\sin\varphi_{m-2}\,d\varphi_1\,d\varphi_2\ldots d\varphi_{m-2}.$$

Aire d'une zone et volume d'un segment sphérique. — Si nous cherchons l'aire de la zone sphérique comprise entre les plans $x_1 = 0$, $x_1 = \alpha$, nous sommes conduits à la formule

$$S_1 = 2\pi R^{m-1} \int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2}\varphi_1\,d\varphi_1 \int_0^{\pi} \sin^{m-3}\varphi_2\,d\varphi_2\ldots\int_0^{\pi} \sin\varphi_{m-2}\,d\varphi_{m-2}$$

et le rapport de l'aire S_1 à l'aire $\frac{S}{2}$ est, par suite, égal à

$$\frac{B}{A} = \frac{\int_\theta^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2}\varphi \, d\varphi}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2}\varphi \, d\varphi}.$$

Le nombre $m-2$ est ici de l'ordre de grandeur de 10^{24}. La fonction $\sin^{m-2}\varphi$, égale à l'unité pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$, décroît très rapidement quand φ décroît. Elle devient excessivement petite dès que la différence $\frac{\pi}{2} - \varphi$ atteint quelques millièmes. Cette remarque permet de prévoir que, si nous prenons θ très voisin de $\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire pour champ d'intégration de B une fraction très faible de A, l'intégrale B pourra représenter une fraction très notable de l'intégrale A.

Pour préciser davantage, introduisons la variable

$$\cos\varphi = x.$$

Nous pourrons alors écrire

$$B = \int_0^\alpha (1-x^2)^{\frac{m-3}{2}} dx \qquad \text{avec} \qquad \alpha = \cos\theta.$$

Remplaçons

$$(1-x^2)^{\frac{m-3}{2}} \quad \text{par} \quad e^{\frac{m-3}{2} L(1-x^2)}$$

et, pour x très petit, $L(1-x^2)$ par sa partie principale $-x^2$.

Nous obtenons pour B la valeur très approchée

$$B_1 = \int_0^\alpha e^{-\frac{m-3}{2}x^2} dx = \sqrt{\frac{2}{m-3}} \int_0^{\sqrt{\frac{m-3}{2}}\alpha} e^{-u^2} du.$$

Quant à l'intégrale A, on sait la calculer : remplaçons-la par l'expression suivante :

$$A_1 = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2(m-3)}}$$

qui peut être considérée comme une valeur asymptotique de A pour m très grand.

Le rapport $\frac{B_1}{A_1}$, que nous considérerons à la place du rapport $\frac{B}{A}$, peut se mettre sous la forme

$$(12) \qquad \frac{B_1}{A_1} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\beta} e^{-u^2} du \qquad \text{avec} \qquad \beta = \alpha \sqrt{\frac{m-3}{2}}.$$

L'expression (12), qu'on rencontre fréquemment dans le calcul des probabilités, porte le nom de *fonction* $\Theta(\beta)$. Des Tableaux ont été construits, donnant les valeurs de cette fonction ([1]).

On a

$$\Theta(\infty) = 1.$$

Cela posé, pour nous faire une idée de la rapidité avec laquelle B_1 tend vers A_1, ou B vers A, prenons par exemple

$$\sqrt{\frac{m-3}{2}} = 10^{12},$$

$$\alpha = 4 \cdot 10^{-12},$$

ce qui correspond à un champ d'intégration excessivement petit pour B, nous avons

$$\beta = 4 \qquad \text{et} \qquad \Theta(\beta) = 0{,}999999985.$$

Nous aboutissons donc à cette conclusion que l'aire d'une zone sphérique, dans l'espace à 10^{24} dimensions, est égale à 10^{-7} près à l'aire totale de la sphère, dès que l'épaisseur de la zone atteint une fraction du diamètre de la sphère égale à $\frac{4}{10^{12}}$.

Sur cette zone, on peut répéter le même raisonnement : l'aire du domaine défini par les inégalités

$$(13) \qquad -\varepsilon_2 < x_2 < +\varepsilon_2$$

est encore la presque totalité de l'aire sphérique. Et enfin on peut aisément déterminer des quantités ε très petites, mais telles cepen-

---

([1]) *Voir*, par exemple, le *Calcul des probabilités*, par J. Bertrand (Gauthier-Villars), ou les *Éléments de la Théorie des probabilités*, par Émile Borel (Hermann).

dant qu'en détachant de l'aire sphérique tous les points ne satisfaisant pas aux inégalités telles que (13) appliquées aux m coordonnées, on conserve une portion extrêmement considérable de l'aire totale. Le même résultat est évidemment vrai pour les volumes, et peut s'établir par une analyse tout à fait pareille. Ceci nous montre encore combien notre intuition géométrique est insuffisante pour nous représenter les faits d'un domaine à un nombre considérable de dimensions.

Les calculs qui précèdent sont d'une grande utilité dans l'étude des principes de la théorie cinétique des gaz : nous renvoyons le lecteur à la Note I.

Ellipsoïde. — Du volume de la sphère (S) représentée par l'équation

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_m^2 = R^2,$$

dont l'expression est

$$V = \frac{\pi^{\frac{m}{2}} R^m}{\Gamma\left(1 + \frac{m}{2}\right)}$$

on déduit aisément celui de l'ellipsoïde

$$a_1^2 x_1^2 + a_2^2 x_2^2 + \ldots + a_m^2 x_m^2 = 1$$

au moyen du changement de variables

$$a_1 x_1 = \frac{y_1}{R},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$a_m x_m = \frac{y_m}{R}.$$

On a alors

$$V' = \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{a_1 a_2 \ldots a_m \Gamma\left(1 + \frac{m}{2}\right)}.$$

Nous allons reprendre ce dernier calcul par une autre méthode, qui nous conduira à faire certaines remarques intéressantes.

Prenons l'ellipsoïde (E) représentée par l'équation suivante :

$$(1) \quad a_1^2 x_1^2 + \ldots + a_p^2 x_p^2 + b_1^2 x_{p+1}^2 + \ldots + b_q^2 x_{p+q}^2 = 1 \qquad \text{avec} \qquad m = p + q.$$

Nous avons

$$V_{p+q} = \frac{\pi^{\frac{p+q}{2}}}{a_1 \ldots a_p b_1 \ldots b_q \Gamma\left(1 + \frac{p+q}{2}\right)}.$$

Considérons le domaine à q dimensions déterminé dans l'ellipsoïde (E) par les points satisfaisant à l'équation

(2) $$a_1^2 x_1^2 + \ldots + a_p^2 x_p^2 = \lambda,$$

où λ est compris entre o et 1.

On aura alors

(3) $$b_1 x_{p+1}^2 + \ldots + b_q x_{p+q}^2 = 1 - \lambda.$$

Le volume à p dimensions de l'ellipsoïde représenté par l'équation (2) est égal à

(4) $$V_\lambda = \frac{(\pi\lambda)^{\frac{p}{2}}}{a_1 a_2 \ldots a_p \Gamma\left(1 + \frac{p}{2}\right)},$$

et le volume $V_{1-\lambda}$ de l'ellipsoïde (3) est égal à

$$V_{1-\lambda} = \frac{[\pi(1-\lambda)]^{\frac{q}{2}}}{b_1 b_2 \ldots b_q \Gamma\left(1 + \frac{q}{2}\right)}.$$

Cela posé, il résulte d'une remarque classique dans la théorie des intégrales multiples qu'on a le droit d'écrire

(5) $$V = \int_{\lambda=0}^{\lambda=1} V_{1-\lambda}\, dV_\lambda = \int_0^1 V_{1-\lambda} \frac{dV_\lambda}{d\lambda}\, d\lambda.$$

Mais il résulte de la formule (4) qu'on a

$$\frac{dV_\lambda}{d\lambda} = \frac{\pi^{\frac{p}{2}} \lambda^{\frac{p}{2}-1}\, d\lambda}{a_1 a_2 \ldots a_p \Gamma\left(\frac{p}{2}\right)},$$

ce qui montre que

(6) $$V_{p+q} = \int_0^1 \frac{\pi^{\frac{p+q}{2}} \lambda^{\frac{p}{2}-1} (1-\lambda)^{\frac{q}{2}}\, d\lambda}{a_1 \ldots a_p b_1 b_2 \ldots b_p \Gamma\left(\frac{p}{2}\right) \Gamma\left(1 + \frac{q}{2}\right)}.$$

Si nous comparons les deux expressions de V_{p+q}, nous voyons qu'on peut en déduire, pour les valeurs entières de p et q, une formule classique de la théorie des intégrales eulériennes,

$$B\left(\frac{p}{2}, 1+\frac{q}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{q}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{p+q}{2}\right)},$$

laquelle est vraie quels que soient p et q, et s'écrit généralement

$$\Gamma(a)\Gamma(b) = \Gamma(a+b)B(a, b),$$

où

$$B(a, b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx.$$

La formule (5) aurait donc pu se déduire de la théorie des intégrales eulériennes. Proposons-nous de voir dans quelle région de l'intervalle de variation o à 1 de λ se trouvent les valeurs de λ donnant les parties les plus notables de l'intégrale (5).

Nous sommes ainsi conduits à rechercher la région du champ d'intégration donnant les plus grandes parties de l'intégrale

$$I = B(\alpha+1, \beta+1) = \int_0^1 \lambda^{\alpha}(1-\lambda)^{\beta}\,d\lambda,$$

α et β étant tous deux des nombres de l'ordre de 5×10^{23}. La région cherchée est le voisinage du maximum de la fonction

$$\mu = \lambda^{\alpha}(1-\lambda)^{\beta}.$$

Nous avons, en prenant la dérivée logarithmique,

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{\alpha}{\lambda} - \frac{\beta}{1-\lambda}.$$

Et la valeur λ_m cherchée est égale à

$$\lambda_m = \frac{\alpha}{\alpha+\beta},$$

alors

$$1-\lambda_m = \frac{\beta}{\alpha+\beta}.$$

Cela posé, nous allons montrer que le rapport

$$(7)\qquad \frac{X}{X} = \frac{\int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \lambda^\alpha (1-\lambda)^\beta \, d\lambda}{\int_0^1 \lambda^\alpha (1-\lambda)^\beta \, d\lambda}$$

est très petit lorsque l'intervalle $\lambda_0 \lambda_1$ ne contient pas la valeur λ_m qui correspond au maximum de la fonction sous le signe $\int$; ou, ce qui revient au même, que l'intégrale

$$\int_{\lambda_m - \varepsilon}^{\lambda_m + \varepsilon} \lambda^\alpha (1-\lambda)^\beta \, d\lambda$$

est très voisine de l'intégrale totale, ε étant cependant un nombre extrêmement petit.

Prenons pour variable d'intégration la quantité μ définie par les équations

$$(8)\qquad \left\{ \begin{aligned} \lambda &= \frac{\alpha + \mu}{\alpha + \beta}, \\ 1 - \lambda &= \frac{\beta - \mu}{\alpha + \beta}. \end{aligned} \right.$$

Nous voyons que l'expression

$$F(\lambda) = \lambda^\alpha (1-\lambda)^\beta$$

peut se mettre sous la forme

$$(9)\qquad F(\lambda) = A\Phi(\mu),$$

en posant

$$A = \lambda_m^\alpha (1 - \lambda_m)^\beta$$

et

$$\Phi(\mu) = \left(1 + \frac{\mu}{\alpha}\right)^\alpha \left(1 - \frac{\mu}{\beta}\right)^\beta.$$

Nous pouvons mettre $\Phi(\mu)$ sous la forme

$$\Phi(\mu) = e^{\alpha L\left(1 + \frac{\mu}{\alpha}\right) + \beta L\left(1 - \frac{\mu}{\beta}\right)}$$

et, en négligeant dans le développement en série les termes qui contiennent α^2 ou β^2 en dénominateur, nous avons pour $\Phi(\mu)$ la

valeur très approchée

$$(10)\qquad \Phi_1(\mu) = e^{-\frac{\mu^2}{2}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)},$$

de sorte que le rapport (7) peut très approximativement s'écrire

$$(11)\qquad \left(\frac{V'}{V}\right)_1 = \frac{\displaystyle\int_{\mu_0}^{\mu_1} e^{-\frac{\mu^2}{2}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)}d\mu}{\displaystyle\int_{-\alpha}^{\beta} e^{-\frac{\mu^2}{2}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)}d\mu}.$$

Il y a avantage encore ici à conduire le calcul sous une forme fréquemment usitée dans le calcul des probabilités.

L'intégrale du dénominateur est très voisine de $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\mu^2}{2}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)}d\mu$, que nous savons calculer et dont la valeur est

$$\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}}}.$$

Le rapport (11) s'écrit alors

$$\left(\frac{V'}{V}\right)_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{u_0}^{u_1} e^{-u^2}du$$

en posant

$$\mu\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)} = u.$$

Et finalement nous voyons que, très approximativement, le rapport

$$\frac{V'}{V} \quad \text{est égal à} \quad \frac{\Theta(u_1)-\Theta(u_0)}{2}.$$

Reprenons maintenant la portion centrale

$$(12)\qquad \int_{\lambda_m-\varepsilon}^{\lambda_m+\varepsilon} \lambda^\alpha(1-\lambda)^\beta\,d\lambda.$$

Son rapport au volume total s'écrit, d'après ce qui précède,

$$\Theta(u)$$

en posant

$$u = \varepsilon\frac{(\alpha+\beta)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\alpha\beta}}.$$

On peut par suite se rendre aisément compte qu'en prenant ε extrêmement petit, on peut obtenir pour le rapport $\Theta(u)$ une valeur très voisine de l'unité. Voici un exemple numérique : la fonction $\Theta(u)$ est voisine de 1 à moins de 10^{-10} près dès que u atteint la valeur 10; or, à $u = 10$ correspond, en prenant pour α et β des nombres de l'ordre de 10^{24},

$$\varepsilon = \frac{1}{2} 10^{-11}.$$

Un intervalle fort restreint du champ d'intégration de λ donne donc la presque totalité du volume de l'ellipsoïde (1). Ce résultat permet de mettre sous la forme d'une proposition de géométrie le théorème de l'équipartition de l'énergie qui joue un rôle si important dans les théories physiques actuelles.

D'une manière plus générale, il ne paraît pas douteux que l'emploi du langage et du raisonnement géométrique peut être très utile dans les recherches de Mécanique statistique, relatives aux systèmes d'un nombre très considérable de particules dont les vitesses, ou d'autres grandeurs physiques, sont réparties d'après les lois du hasard.

NOTE I.

SUR LES PRINCIPES DE LA THÉORIE CINÉTIQUE DES GAZ [1].

La théorie cinétique des gaz et ses applications et extensions diverses sont encore loin d'être acceptées sans difficulté par tous. En particulier, les applications du calcul des probabilités aux calculs statistiques concernant les molécules excitent beaucoup de défiance chez certains esprits. Bien peu sans doute en sont restés à la boutade de Joseph Bertrand, disant que ces problèmes de probabilité ressemblent au problème célèbre de l'*âge du capitaine*, qu'on propose de déterminer, connaissant la hauteur du grand mât. Mais, sans aller jusque-là, on doit reconnaître que l'énoncé même des problèmes manque souvent de précision et que les déductions par lesquelles on arrive à la solution manquent parfois de rigueur.

En faisant cette constatation, je tiens à dire qu'elle ne diminue en aucune manière mon admiration pour les créateurs de la théorie. La route était difficile et ils ont eu raison de ne point s'attarder aux premiers obstacles; le plus pressé était d'arriver à des résultats susceptibles de vérification expérimentale; ces résultats sont un encouragement à persévérer dans la voie ouverte par Maxwell.

Mais cette vérification en quelque sorte *a posteriori* ne satisfait pas tous les esprits et il ne me paraît pas inutile de reprendre les principes de cette théorie cinétique pour chercher à lui donner une base rigoureuse au point de vue mathématique.

Cette tentative n'a pas grand intérêt pour les adeptes convaincus; ils vont de l'avant avec succès; ils perdraient leur temps en retournant en arrière, et je serai le premier à le leur déconseiller.

Aussi c'est à ceux qui jusqu'ici ont plus ou moins partagé sur la théorie cinétique des gaz l'opinion de Joseph Bertrand que je voudrais m'adresser. Leurs scrupules sont légitimes à certains égards : on ne peut reprocher à un mathématicien son amour de la rigueur; mais il ne me paraît pas impossible de les satisfaire.

---

(1) *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, (3), t. XXIII, 1906. En réimprimant cette Note qui date de 1906, on n'a pas cru devoir en modifier le texte; *voir* la Note II, écrite plus récemment, notamment page 94.

Tel est le but des pages qui suivent : elles ne font faire aucun progrès *réel* à la théorie, au point de vue du physicien ; mais elles auront peut-être pour résultat de convaincre quelques mathématiciens de son intérêt et, en augmentant le nombre des chercheurs, contribueront peut-être indirectement à son développement. S'il en est ainsi, elles n'auront pas été inutiles, indépendamment de l'intérêt esthétique qui s'attache à toute construction logique.

I.

Il me paraît d'abord nécessaire de préciser la notion même de probabilité, qui joue un si grand rôle dans la théorie cinétique. Dans ce but, je vais étudier avec quelque détail un problème simple de probabilités ; je m'excuse d'avance de la longueur de ces préliminaires : ils m'ont paru indispensables à la clarté.

Considérons un cercle C sur lequel est marqué un point fixe O ; à chaque petite planète nous faisons correspondre un point P, qui se meut sur le cercle C suivant la loi suivante : lorsque la petite planète passe en un point déterminé (¹) A de son orbite, le point qui la représente passe en O ; il se meut sur le cercle d'un mouvement uniforme dans le sens positif.

Nous avons ainsi sur le cercle C des points P qui se meuvent tous dans le même sens et dont le nombre n est égal au nombre des petites planètes actuellement connues (²). Soient C_1 et C_2 les deux demi-circonférences séparées par le diamètre de C qui passe en O ; nous nous posons la question suivante :

Problème A. — *Quelle est la probabilité pour qu'au 1er janvier prochain tous les points* P *soient sur le demi-cercle* C_1 ?

Nous devons nous poser une question préalable : l'énoncé du problème A a-t-il un sens (³) ? Il est clair que, si nous possédons un

(¹) Nous laissons de côté les difficultés relatives à la fixation du point A : elles sont de même nature que celles qui sont examinées plus loin. Pour fixer les idées, on peut imaginer un demi-plan fixe passant par le centre du Soleil et coupant chaque orbite en un seul point, qui sera le point A.

(²) Le problème se poserait sous une forme un peu différente si l'on faisait intervenir aussi les petites planètes qui seront découvertes d'ici au 1er janvier 1920, par exemple, ou encore toutes les petites planètes à découvrir.

(³) *Voir* dans Poincaré, *La Science et l'Hypothèse*, le Chapitre sur le calcul des probabilités. Je ne puis citer à chaque instant ces pages suggestives, dont la lecture m'a été fort utile. Sur plusieurs points, d'ailleurs, j'adopte un point de vue très différent de celui de M. Poincaré.

annuaire donnant effectivement les longitudes des petites planètes à l'époque indiquée, nous saurons si les points P sont ou ne sont pas sur le demi-cercle C_1 ; si nous constatons, par exemple, qu'ils n'y sont pas tous, nous devrons dire que la probabilité est égale à *zéro*; s'ils y étaient tous, elle serait égale à *un*, et ce sont les deux seules hypothèses possibles. Ainsi considéré, le problème n'a guère d'intérêt, et son énoncé est peu correct, car il n'est guère raisonnable de parler de probabilités lorsqu'on possède la certitude.

Mais on peut se placer à un point de vue différent et poser le problème A sans donner aucune donnée numérique relative aux petites planètes. On sait seulement quel est leur nombre et que les durées de leurs révolutions sont toutes différentes entre elles, bien que comprises entre des limites assez rapprochées. Dans ces conditions, le problème A doit-il être regardé comme ayant un sens? Il ne me semble pas ; ce n'est qu'en vertu d'une *convention* qu'on pourra lui en donner un. Une probabilité, en effet, est une quantité d'une nature particulière, qui ne peut être exprimée qu'au moyen de quantités de même nature préalablement connues. Lorsqu'on demande quelle est la probabilité d'un coup de dés déterminé, on fait l'hypothèse que, pour chaque dé, la probabilité de chaque face est la même et que les divers dés sont indépendants. On pourrait être amené, par analogie, à compléter l'énoncé du problème A en ajoutant : 1° que, pour chaque point P, la probabilité d'être sur C_1 est égale à la probabilité d'être sur C_2 : 2° que les probabilités relatives aux divers points P sont indépendantes. Or, si la première convention paraîtra sans doute naturelle à tous, la seconde paraîtra arbitraire à beaucoup. En adoptant ces conventions, la solution du problème A est visiblement $\frac{1}{2^n}$. C'est à ce même résultat que nous aboutirons par une autre voie, ce qui montrera l'équivalence de la convention que nous adopterons avec les précédentes, en ce qui concerne le problème A.

Étudions auparavant une forme un peu différente de ce problème.

Problème A'. — *Dans l'énoncé du problème A, on remplace l'époque du 1er janvier prochain par une époque antérieure (ou postérieure) de 1000 ans.*

Cet énoncé est moins fictif que A, car les positions des petites planètes il y a 1000 ans (ou dans 1000 ans) sont moins bien connues que les positions actuelles; on conçoit donc qu'il soit plus naturel de se poser à leur égard une question de probabilités : deux astronomes pourraient vouloir engager un pari sur la question qui fait l'objet de

l'énoncé A'; ils feraient ensuite les calculs nécessaires pour pouvoir régler ce pari.

Mais la différence essentielle entre A et A', c'est que, pour A, nous sommes obligés ou de supposer une connaissance complète de la situation des petites planètes, ce qui supprime le problème, ou de supposer une ignorance complète, ce qui exige une convention supplémentaire en partie arbitraire. Au contraire, pour A', nous pouvons supposer connus les éléments actuels des petites planètes et demander que l'on réponde sans faire les calculs qui donneraient leurs longitudes dans 1000 ans (ou il y a mille ans). Toutefois cette différence est plus apparente que réelle, car on pourrait concevoir un calculateur assez habile pour, à la seule inspection des éléments actuels, calculer les éléments à l'époque indiquée dans l'énoncé de A'; pour ce calculateur, A' ne diffère pas de A.

Nous sommes ainsi conduits à envisager le problème suivant :

Problème B. — *Quelle est la probabilité pour que les points* P *soient tous sur* C_1 *à une époque* t *comprise dans un intervalle donné de* 2000 *ans, par exemple entre le* 1er *janvier* 920 *et le* 1er *janvier* 2920; *cette époque* t *sera déterminée par le sort, de telle manière qu'il y ait des probabilités égales à ce que* t *soit compris dans deux intervalles de temps égaux quelconques.*

Si nous écartons d'abord l'hypothèse où nous aurions le temps de faire tous les calculs nécessaires à la solution exacte de ce problème B, nous apercevons cependant des cas où la réponse à donner ne sera pas $\frac{1}{2^n}$. Si, par exemple, deux petites planètes ont actuellement [1] des moyens mouvements égaux et des longitudes différant de 180°, il est clair que les points P correspondants ne seront jamais simultanément sur C_1; la probabilité demandée est donc *zéro*. Si, au contraire, deux petites planètes ont des moyens mouvements égaux et des longitudes égales, pour que l'une soit sur C_1, il faut et il suffit que l'autre y soit; tout se passe donc comme s'il y avait une petite planète de moins, ce qui conduit à répondre $\frac{1}{2^{n-1}}$ au lieu de $\frac{1}{2^n}$.

Mais la réponse à faire au problème B pourra être bien différente si l'on fait effectivement le calcul des positions des points P dans

---

[1] En fait, il n'existe pas actuellement deux telles petites planètes; mais on peut en découvrir demain, ce qui suffit à mon raisonnement. On ne peut, en effet, répondre : *cela est peu probable*, comme on le ferait si nous discutions le problème A : nous supposons ici que l'on sait effectivement *ce qui est*.

l'intervalle donné. Il arrivera peut-être [1] que, dans un intervalle de temps déterminé, de 2543 secondes par exemple, les points P seront tous sur C_1; si l'on désigne par N le nombre de secondes contenu dans l'intervalle de temps de 2000 ans visé dans l'énoncé, la réponse est visiblement $\frac{2543}{N}$, car telle est la probabilité pour que l'époque t soit comprise dans l'intervalle favorable.

Si l'on se plaçait à un point de vue purement abstrait, on serait conduit à généraliser ainsi l'énoncé B :

Problème B'. — *On considère un certain nombre de points Q qui se meuvent sur un même cercle d'un mouvement uniforme; connaissant exactement les positions initiales et les vitesses, calculer la probabilité pour que ces points soient tous sur un arc donné à une époque t choisie arbitrairement dans un intervalle donné (a, b).*

Cette probabilité tend-elle vers une limite lorsque l'intervalle a, b grandit indéfiniment? Quelle est, dans ce cas, cette limite?

Nous ne discuterons pas ces questions qui n'ont aucun intérêt concret; nous signalons seulement le problème B' à titre de curiosité arithmétique, car sa discussion est, à ce point de vue, intéressante et conduit à des résultats inattendus [2].

Mais l'intérêt de cette discussion réside dans les propriétés *arithmétiques* des rapports des vitesses; or, pratiquement, ces propriétés arithmétiques n'ont aucune existence, car cela n'a aucun sens de dire que deux nombres connus expérimentalement ont un rapport commensurable ou incommensurable. Aussi le problème B' est-il sans intérêt réel; énonçons le problème correspondant en restant dans la réalité :

Problème B''. — *Que devient la probabilité qui fait l'objet de* B *lorsque l'intervalle de temps considéré grandit indéfiniment?*

La grande différence qu'il y a entre B' et B'', c'est que dans B' les vitesses et les positions initiales des points Q sont supposées connues *exactement*; tandis que, dans B'', les vitesses et les positions initiales

(1) Sans avoir fait le calcul, je crois pouvoir affirmer que cette circonstance hypothétique ne se présente pas effectivement pour le problème B ici posé; mais elle se présenterait sans doute si, dans l'énoncé de B, on remplaçait la demi-circonférence C_1 par un arc déterminé de 355° de la circonférence C.

(2) Depuis que ceci a été écrit (1906), des études ont été publiées sur des problèmes analogues à B'; *voir* par exemple : D. König et A. Szücs, *Mouvement d'un point abandonné à l'intérieur d'un cube* (*Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, t. XXXVI, 1913, p. 79). Ce travail se rattache aussi à notre problème F (p. 87).

des points P sont connues seulement à une certaine approximation; de plus les vitesses varient avec le temps suivant une loi imparfaitement connue. Aussi l'énoncé B″ est-il insuffisant; nous allons chercher à le compléter.

Nous ferons, pour abréger, quelques hypothèses dont le lecteur se rendra compte aisément qu'elles ne sont pas essentielles; nous supposerons d'abord les moyens mouvements constants; nous supposerons de plus que l'on connaît pour chacun d'eux un intervalle $a-\varepsilon$, $a+\varepsilon$ dans lequel il est compris, et que toutes les valeurs de cet intervalle sont *également probables*. Cette dernière hypothèse étant entièrement arbitraire, j'insiste sur le point qu'elle n'est pas essentielle; on pourrait supposer, en imitant un calcul de M. Poincaré, que la probabilité pour que le moyen mouvement soit compris entre $a+\theta\varepsilon$ et $a+(\theta+d\theta)\varepsilon$ est de la forme $\varphi(\theta)\,d\theta$, $\varphi(\theta)$ étant une fonction continue positive quelconque, sensiblement nulle pour $|\theta|>1$ et telle que l'on ait

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\theta)\,d\theta=1.$$

Nous prenons pour $\varphi(\theta)$ une fonction discontinue :

$$\varphi(\theta)=\tfrac{1}{2}\quad\text{pour}\quad|\theta|<1,$$
$$\varphi(\theta)=0\quad\text{pour}\quad|\theta|>1.$$

Dès lors, au lieu de B″, nous aurons l'énoncé suivant :

Problème C. — *Connaissant à ε près les moyens mouvements des n petites planètes et connaissant exactement* [1] *leurs positions initiales, on désigne par ϖ la probabilité pour qu'à une époque t choisie arbitrairement dans un intervalle a, b tous les points P correspondants soient sur C_1. Quelle est la limite vers laquelle tend ϖ lorsque l'intervalle a, b augmente indéfiniment?*

La probabilité inconnue se calculera au moyen de probabilités élémentaires supposées connues : 1° la probabilité pour qu'un moyen mouvement ait une valeur déterminée entre $a-\varepsilon$ et $a+\varepsilon$; nous en avons déjà parlé; 2° la probabilité pour que t ait une valeur déterminée comprise entre a et b; nous supposons que la probabilité pour que t soit compris entre c et d est $\frac{d-c}{b-a}$, quels que soient c et d compris entre a et b.

---

(1) Cette connaissance exacte des positions initiales est encore une hypothèse simplificatrice non essentielle.

Le problème C a maintenant un sens mathématique parfaitement net : il est d'ailleurs aisé de voir que la probabilité limite demandée est $\frac{1}{2^n}$. Le moyen le plus simple pour arriver à ce résultat me paraît être une représentation géométrique dans l'espace à n dimensions que je vais exposer d'abord en supposant, pour plus de clarté, $n = 2$.

Nous désignerons d'une manière générale par $2\pi a_i$ la valeur initiale de l'arc OP_i et par $2\pi b_i$ la vitesse angulaire du point P_i ; la valeur de l'arc OP_i à l'époque t est ainsi $2\pi(a_i + b_i t)$. Pour que P_i soit sur l'arc C_1 il faut et il suffit que $a_i + b_i t$ soit compris entre k_i et $k_i + \frac{1}{2}$, k étant un nombre entier quelconque. Nous supposons que l'on a

$$b_i - \varepsilon_i < b'_i < b_i + \varepsilon_i ;$$

la vitesse angulaire probable est $2\pi b_i$, à $2\pi\varepsilon_i$ près.

Nous poserons

$$x_i = a_i + b'_i t$$

et nous supposerons que les x_i sont les coordonnées d'un point ξ dans l'espace à n dimensions.

Considérons, dans cet espace, le solide II limité par les plans

$$x_i = k_i, \qquad x_i = k_i + \frac{1}{2},$$

en désignant par $k_1, k_2, \ldots, k_n$, n nombres entiers quelconques. Pour que tous les points P_i soient sur C_1, il faut et il suffit que le point ξ soit à l'intérieur de l'un des solides II.

Faisons la figure en supposant $n = 2$; les solides II se réduisent alors à des carrés, que nous couvrons de hachures. Soit ω le point de coordonnées a_1, a_2 et MNPQ le rectangle dont les côtés ont pour équations

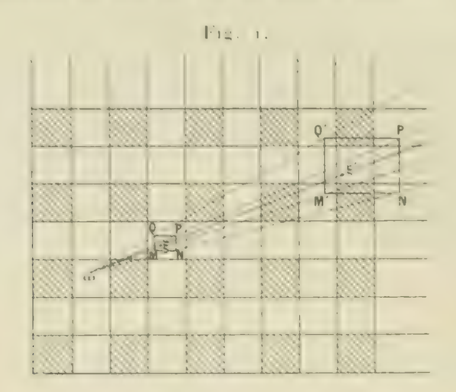
$$x_1 = a_1 + b_1 \pm \varepsilon_1,$$
$$x_2 = a_2 + b_2 \pm \varepsilon_2.$$

A l'époque $t = 1$, le point ξ occupe une certaine position à l'intérieur du rectangle MNPQ et, d'après nos hypothèses, toutes les positions y sont également probables, en ce sens que la probabilité pour que ξ se trouve dans une aire d'étendue S est proportionnelle à S.

Soit M'N'P'Q' le rectangle homothétique de MNPQ dans un certain rapport t, le centre d'homothétie étant ω ; il est clair que le point ξ' qui correspond à l'époque t est l'homothétique de ξ par rapport à ω ; il occupe donc, dans le rectangle M'N'P'Q', la même position que ξ dans MNPQ. Par suite, la probabilité pour que ξ' soit dans une cer-

taine aire S' située dans M'N'P'Q' est proportionnelle à S'. Or, lorsque t est très grand, le rectangle M'N'P'Q' est très grand par rapport aux dimensions des carrés ; on en conclut aisément que le rapport

Fig. 1.



de la somme des aires des carrés couverts de hachures situés à l'intérieur de M'N'P'Q' à l'aire totale de ce rectangle est très voisin de $\frac{1}{4}$, la différence tendant vers zéro avec $\frac{1}{t}$. On en conclut par un raisonnement facile que nous omettons que la probabilité limite demandée est $\frac{1}{4}$.

Si, au lieu de deux dimensions, il y en avait n, le rapport du volume occupé par les solides II au volume total est $\frac{1}{2^n}$; telle est aussi la probabilité limite cherchée.

On remarquera qu'en même temps que le problème C nous avons résolu un problème un peu différent :

Problème D. — *Les hypothèses étant les mêmes que dans* C, *quelle est la probabilité pour que les points* P *soient tous sur* C_1 *à une époque t déterminée, mais très éloignée de l'époque actuelle, par exemple dans* 10^{100} *années, ou il y a* 10^{100} *années.*

On trouve que cette probabilité diffère extrêmement peu de $\frac{1}{2^n}$. Il est d'ailleurs clair que si la probabilité demandée dans D a une limite lorsque t augmente indéfiniment, cette limite est la solution de C. La réciproque est moins évidente, et c'est pourquoi il n'était pas inutile de distinguer les problèmes C et D.

On peut exprimer le résultat obtenu en disant que *la solution exacte des problèmes* C *et* D *est précisément celle qu'on obtiendrait*

en regardant les petites planètes comme indépendantes. Il est manifeste que c'est là une loi générale et que tout problème de probabilité tel que le suivant : « *Quelle est la probabilité pour que les points représentatifs de quatre des petites planètes* (non fixées d'avance) *diffèrent respectivement de moins de* 1″ *des sommets d'un carré inscrit* (*non donné d'avance*)? » peut être posé sous une forme analogue à C ou D et admet alors la solution que l'on obtient *en regardant les points* P *distribués par le hasard d'une manière indépendante les uns des autres* (la probabilité pour que l'un d'eux soit sur un arc étant proportionnelle à la longueur de cet arc).

C'est là le résultat essentiel que nous voulions obtenir; il n'est pas inutile d'y ajouter quelques remarques.

Observons d'abord que l'on peut *convenir* de donner au problème A la même réponse qu'au problème D, si l'on suppose que l'on ignore les éléments des petites planètes. En réalité, l'introduction d'un temps très long (futur ou passé) dans l'énoncé de D a pour effet de rendre inutile notre connaissance *approximative* de ces éléments. C'est cette connaissance approximative seule qui distingue une époque actuelle ou rapprochée d'une époque éloignée; il est clair, en effet, qu'une telle distinction ne peut avoir aucun fondement logique. Là où il y a connaissance, il n'y a pas place pour la probabilité : si j'ai pointé les coups d'une partie de pile ou face et si l'on me demande quelle est la probabilité pour que, sur n coups, on ait amené toujours face, je ne devrai pas répondre $\frac{1}{2^n}$, mais bien 1 ou 0 suivant que l'événement s'est ou non effectivement produit. S'il s'agit au contraire d'une partie future, je répondrai $\frac{1}{2^n}$; ma réponse pourra être encore différente s'il s'agit d'une partie commencée.

Si donc la distribution actuelle des petites planètes était *très irrégulière*, si, par exemple, tous les points P étaient sur C_1, on pourrait parier que cette irrégularité cessera dans l'avenir et n'existait pas dans le passé. Mais la longueur du temps n'a par elle-même aucune vertu spéciale pour amener la régularité : la probabilité d'une distribution singulière déterminée reste toujours la même; mais la probabilité disparaît pour faire place à la certitude lorsqu'il s'agit d'un événement accompli (ou connu).

II.

Abordons maintenant les principes de la théorie cinétique. On devine que nous allons chercher à poser sous une forme analogue à C

ou D les problèmes que l'on pose habituellement sous une forme analogue à A, à B, ou même à B'.

Précisons d'abord les hypothèses physiques.

Nous considérons un certain nombre de sphères toutes identiques entre elles, supposées parfaitement élastiques, et se mouvant à l'intérieur d'une enceinte rigide et absolument fixe sans être soumises à aucune force extérieure. Lorsqu'une sphère choque les parois ou que deux sphères se choquent entre elles, le mouvement ultérieur est déterminé par les lois du choc des corps parfaitement élastiques, c'est-à-dire qu'il y a à la fois conservation de la quantité de mouvement [1] et conservation de la force vive.

Désignons par x_1, x_2, x_3 les coordonnées du centre de la première sphère, par x_4, x_5, x_6 les coordonnées du centre de la seconde, etc., par x_{3n-2}, x_{3n-1}, x_{3n} les coordonnées du centre de la $n^{\text{ième}}$. Le fait que les sphères ne peuvent traverser les parois s'exprime par n inégalités de la forme

$$(1)\quad \begin{cases} f(x_1, x_2, x_3) < 0, \\ f(x_4, x_5, x_6) < 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f(x_{3n-2}, x_{3n-1}, x_{3n}) < 0. \end{cases}$$

De même, si l'on désigne par a le diamètre d'une des sphères, le fait que deux sphères ne peuvent pas se pénétrer s'exprime par $\frac{n(n-1)}{2}$ inégalités de la forme

$$(2)\quad \begin{cases} (x_1 - x_4)^2 + (x_2 - x_5)^2 + (x_3 - x_6)^2 - a^2 > 0, \\ (x_1 - x_7)^2 + (x_2 - x_8)^2 + (x_3 - x_9)^2 - a^2 > 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ (x_1 - x_{3n-2})^2 + (x_2 - x_{3n-1})^2 + (x_3 - x_{3n})^2 - a^2 > 0, \\ (x_4 - x_7)^2 + (x_5 - x_8)^2 + (x_6 - x_9)^2 - a^2 > 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (x_{3n-5} - x_{3n-2})^2 + (x_{3n-4} - x_{3n-1})^2 + (x_{3n-3} - x_{3n})^2 - a^2 > 0. \end{cases}$$

Si l'on regarde les x_i comme les coordonnées d'un point dans l'espace à $3n$ dimensions, les inégalités (1) et (2) définissent dans cet espace un certain domaine D d'un seul tenant. A chaque point P de ce domaine correspond une situation bien déterminée pour l'ensemble des sphères,

---

[1] Dans le cas du choc contre une paroi, c'est la projection de la quantité de mouvement sur le plan tangent qui reste constante.

et réciproquement. Comment varie le point P lorsque les sphères se déplacent suivant les lois indiquées plus haut?

Il est bien clair d'abord que, tant qu'il n'y a pas choc, le mouvement de P est rectiligne et uniforme; si l'on désigne par v_1, v_2, v_3 les projections de la vitesse du point x_1, x_2, x_3, etc., il est clair que la vitesse v du point P a pour projections sur les $3n$ axes : $v_1, v_2, \ldots, v_{3n}$ et par suite que l'on a

$$v^2 = \sum_{1}^{3n} v_i^2.$$

Cette vitesse v est donc constante, puisque la force vive totale des sphères se conserve.

Supposons maintenant que la sphère x_1, x_2, x_3 heurte la paroi; le point P rencontrera alors la surface limite du domaine D

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0.$$

Le point P se réfléchira donc sur cette paroi.

Nous allons voir que les lois de cette réflexion, dans l'espace à $3n$ dimensions, sont la généralisation des lois dans l'espace ordinaire.

Considérons une surface quelconque

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0$$

en posant, pour abréger, $m = 3n$, et soient $v_1, v_2, \ldots, v_m$ les projections de la vitesse du point P qui heurte cette surface en un point de coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

Les lois de la réflexion seront les suivantes : *la trajectoire incidente, la trajectoire réfléchie et la normale à la surface réfléchissante sont dans un même plan à deux dimensions, dans lequel la normale est bissectrice de l'angle des deux trajectoires; la valeur absolue de la vitesse reste constante.*

Les cosinus directeurs de la normale sont proportionnels à

$$\frac{d\varphi}{dx_1}, \quad \frac{d\varphi}{dx_2}, \quad \ldots, \quad \frac{d\varphi}{dx_m}.$$

On a, par suite, pour les projections $w_1, w_2, \ldots, w_m$ de la vitesse après réflexion

$$w_1 = \lambda v_1 + \mu \frac{d\varphi}{dx_1}, \quad \ldots, \quad w_m = \lambda v_m + \mu \frac{d\varphi}{dx_m}.$$

On déterminera λ et μ par la condition que les cosinus des angles

de la direction incidente et de la direction réfléchie avec la normale sont égaux, ce qui donne l'équation

$$\frac{\sum v_i \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}}{\pm\sqrt{\sum v_i^2 \sum\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)^2}} = \frac{\sum u_i \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}}{\pm\sqrt{\sum u_i^2 \sum\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)^2}},$$

et par la condition

$$\sum v_i^2 = \sum u_i^2,$$

qui exprime que le carré de la vitesse reste constant. En tenant compte de cette seconde relation, la première devient ([1])

$$(\lambda+1)\sum v_i \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} + \mu\sum\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)^2 = 0,$$

et, d'autre part, la seconde développée s'écrit

$$(\lambda^2-1)\sum v_i^2 + 2\lambda\mu\sum v_i \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} + \mu^2\sum\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)^2 = 0.$$

Ces équations admettent la solution à écarter $\lambda = -1$, $\mu = 0$; l'autre solution est

$$\lambda = 1, \qquad \mu = \frac{-2\sum v_i \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}}{\sum\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_i}\right)^2}.$$

Il est d'ailleurs aisé de vérifier que la trajectoire incidente et la trajectoire réfléchie sont situées du même côté de la surface

$$\varphi = 0,$$

comme cela doit être.

On a ainsi les formules de la réflexion sous la forme

$$(3)\qquad \left\{\begin{array}{l} u_1 = v_1 - \dfrac{2\sum v_i \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}}{\sum\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)^2}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ u_m = v_m - \dfrac{2\sum v_i \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}}{\sum\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)^2}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_m}. \end{array}\right.$$

([1]) Une discussion facile montre que l'on doit prendre des signes différents devant les deux radicaux.

Appliquons ceci au cas où $m = 3n$ et où φ se réduit à

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0;$$

nous aurons

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned}
w_1 &= v_1 - \frac{2\left(v_1 \dfrac{df}{dx_1} + v_2 \dfrac{df}{dx_2} + v_3 \dfrac{df}{dx_3}\right)}{\left(\dfrac{df}{dx_1}\right)^2 + \left(\dfrac{df}{dx_2}\right)^2 + \left(\dfrac{df}{dx_3}\right)^2} \frac{df}{dx_1},\\
w_2 &= v_2 - \frac{2\left(v_1 \dfrac{df}{dx_1} + v_2 \dfrac{df}{dx_2} + v_3 \dfrac{df}{dx_3}\right)}{\left(\dfrac{df}{dx_1}\right)^2 + \left(\dfrac{df}{dx_2}\right)^2 + \left(\dfrac{df}{dx_3}\right)^2} \frac{df}{dx_2},\\
w_3 &= v_3 - \frac{2\left(v_1 \dfrac{df}{dx_1} + v_2 \dfrac{df}{dx_2} + v_3 \dfrac{df}{dx_3}\right)}{\left(\dfrac{df}{dx_1}\right)^2 + \left(\dfrac{df}{dx_2}\right)^2 + \left(\dfrac{df}{dx_3}\right)^2} \frac{df}{dx_3},\\
w_4 &= v_4,\\
w_5 &= v_5,\\
&\dots\dots\dots\\
w_{3n} &= v_{3n}.
\end{aligned}\right.$$

Or ces équations (4) correspondent bien aux vitesses ultérieures des centres des sphères dans l'espace ordinaire, lorsque l'une d'elles s'est réfléchie sur la paroi.

Supposons maintenant qu'il y ait un choc entre deux sphères, les deux premières, par exemple; le point P heurte alors la surface

$$\varphi = (x_1 - x_4)^2 + (x_2 - x_5)^2 + (x_3 - x_6)^2 - a^2 = 0.$$

Si nous substituons cette valeur de φ dans les équations (3), nous obtenons, après des réductions faciles, des formules qui peuvent se mettre sous la forme

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned}
w_1 &= v_1 - \frac{x_1 - x_4}{a^2} S,\\
w_2 &= v_2 - \frac{x_2 - x_5}{a^2} S,\\
w_3 &= v_3 - \frac{x_3 - x_6}{a^2} S,\\
w_4 &= v_4 + \frac{x_1 - x_4}{a^2} S,\\
w_5 &= v_5 + \frac{x_2 - x_5}{a^2} S,\\
w_6 &= v_6 + \frac{x_3 - x_6}{a^2} S,\\
w_7 &= v_7,\\
&\dots\dots\dots\\
w_{3n} &= v_{3n}.
\end{aligned}\right.$$

en posant

$$S = (x_1 - x_4)(v_1 - v_4) + (x_2 - x_5)(v_2 - v_5) + (x_3 - x_6)(v_3 - v_6).$$

Or, on constate aisement que ces formules (6) sont bien celles qui déterminent les vitesses des centres des sphères, dans l'espace ordinaire, après le choc de deux d'entre elles.

Par conséquent, *le mouvement du point* P *dans le domaine* D, *défini par les relations* (1) *et* (2), *est le mouvement d'un point libre qui se réfléchit sur les parois suivant les lois classiques.*

C'est là un problème que l'on peut étudier sous une forme générale, indépendamment du nombre des dimensions de l'espace considéré, nombre d'où ne résulte pas de difficulté nouvelle ([1]). Pour préciser la forme sous laquelle peuvent se poser des problèmes de probabilité relatifs à un tel mouvement, il sera plus commode de nous placer simplement dans l'espace ordinaire à trois dimensions.

III.

Considérons donc, dans l'espace ordinaire, un domaine limité d'un seul tenant D. Dans ce domaine se déplace un point matériel P, qui n'est soumis à aucune force extérieure et se réfléchit sur les parois suivant la loi classique. La vitesse du point P est donc constante; si on la représente par un vecteur d'origine O, l'extrémité V de ce vecteur sera sur une certaine sphère S de centre O. A un instant t, le point P occupe une certaine position dans D et le point V une certaine position sur S.

On peut dès lors se poser le problème suivant :

Problème E. — *Sachant simplement que le domaine* D *a un certain volume* v *et la sphère* S *une certaine surface* σ, *on demande quelle est la probabilité pour que le point* P *appartienne à un certain élément de volume* $d\tau$ *de* D *que le point* V *appartienne à un certain élément de volume* $d\omega$ *de* S.

Il est clair que la seule réponse que l'on puisse faire, *si l'on en fait une*, est que ces probabilités sont $\frac{d\tau}{v}$ et $\frac{d\omega}{\sigma}$; mais on peut très légiti-

([1]) On pourrait penser qu'une difficulté pourrait provenir du fait que les surfaces (1) et (2) sont des sortes de surfaces cylindriques, chaque équation ne renfermant qu'un petit nombre de coordonnées; mais cette difficulté n'a rien d'essentiel.

mement refuser de répondre, en considérant les données comme insuffisantes; nous pourrions répéter ici les remarques faites plus haut à propos du problème A (p. 11).

Nous allons donc transformer l'énoncé E en nous restreignant, pour abréger, à la considération du point V.

Problème F. — *Étant donné la forme exacte du domaine* D, *la position et la vitesse exactes du point* P *dans le domaine* D, *quelle est la probabilité pour que le point* V *appartienne à un certain élément* $d\omega$ *de* S, *à une époque* t, *à choisir arbitrairement dans un certain intervalle; cette probabilité tend-elle vers une limite lorsque l'intervalle de temps considéré augmente indéfiniment?* Cet énoncé est l'analogue de B'. La probabilité, suivant les données effectives que l'on possède, peut avoir des valeurs très diverses. Par exemple, si le domaine D est un cube, la probabilité aura la valeur *zéro* pour certains domaines $d\omega$ et sera égale à une fraction finie pour certains autres domaines infiniment petits [1].

Mais ce problème F me paraît dénué d'intérêt, parce qu'il ne correspond à rien de réel. Je ne m'arrêterai pas à une première difficulté, qui cependant ne me paraît pas négligeable : les données que l'on suppose *exactement connues* dans l'énoncé F peuvent-elles être, je ne dis pas calculées, mais même *définies* avec une précision absolue? J'accorde pour l'instant que l'on peut concevoir ces données comme connues à une époque t. Mais, sans parler des forces extérieures qu'il n'est pas possible de supprimer complètement, la rigidité absolue de la paroi est une hypothèse absolument irréalisable. Supprimerait-on toutes les actions des corps rapprochés, ou arriverait-on à en tenir compte, un phénomène tel que les variations de l'attraction des étoiles, sur lequel on n'a aucun renseignement, exerce une influence, extrêmement faible il est vrai, mais qui suffit pour que tout raisonnement basé sur le fait que deux nombres sont commensurables, par exemple, soit complètement inadmissible. Nous sommes ainsi amenés à modifier l'énoncé F en cherchant à y introduire cette indétermination nécessaire des données. On peut, par exemple, lui donner la forme suivante :

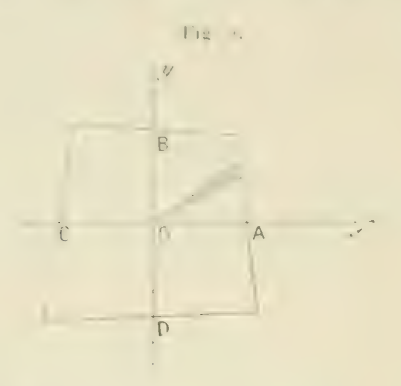
Problème G. — *Les données étant les mêmes que dans* F, *on admet de plus que la position de tout ou partie de la paroi, ainsi que les données initiales, ne sont connues qu'à une certaine approximation : on demande de calculer la probabilité que le point* V *soit dans* $d\omega$

(1) *Voir* la note 1 de la page 77.

à une époque t comprise entre des limites connues (que l'on fera ensuite grandir indéfiniment), en fonction des probabilités élémentaires, supposées connues, que les données aient telles valeurs comprises entre les limites qui leur sont assignées.

Pour plus de netteté, nous allons donner un énoncé de G pour un cas particulier précis, en nous bornant à l'espace à deux dimensions.

Fig. 8.



Problème G. — *On considère deux axes rectangulaires et le quadrilatère dont les côtés ont pour équations*

$$x = a + \varepsilon_1 y,$$
$$x = -a + \varepsilon_2 y,$$
$$y = a + \varepsilon_3 x,$$
$$y = -a + \varepsilon_4 x,$$

dans lesquelles $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ sont des nombres assujettis à être inférieurs à un nombre très petit ε. La probabilité pour que l'un d'eux soit compris entre α et β, α et β étant des nombres compris entre $-\varepsilon$ et $+\varepsilon$, est, par hypothèse, $\frac{\beta - \alpha}{2\varepsilon}$. On considère un point P qui part de l'origine O, avec une vitesse dont on donne la grandeur v et dont on sait que l'angle de sa direction avec Ox est compris entre $\theta - \varepsilon$ et $\theta + \varepsilon$, la probabilité pour que cet angle soit compris entre θ' et θ'' (supposés compris tous deux entre ces limites) est, par hypothèse, $\frac{\theta'' - \theta'}{2\varepsilon}$. Cela posé, on considère la probabilité pour qu'à une époque t, choisie au hasard dans un intervalle donné, l'angle compris entre zéro et 2π que fait la direction de la vitesse avec Ox soit compris entre deux limites données φ et $\varphi + \Delta\varphi$, et l'on demande

vers quelle limite tend cette probabilité lorsque cet intervalle grandit indéfiniment suivant une loi quelconque.

Nous avons choisi à dessein cet exemple, parce que, pour $\varepsilon = 0$, on se trouve dans un cas où la vitesse est nécessairement parallèle à l'une ou l'autre des deux droites fixes; on voit assez aisément que, quelque petit que soit ε, à condition de faire grandir d'autant plus l'intervalle de temps considéré que ε est plus petit, *toutes les directions de vitesse deviennent également probables*, c'est-à-dire que la probabilité limite demandée est $\frac{\Delta\varphi}{2\pi}$. Nous ne développerons pas les raisonnements qui conduisent à ce résultat, car ils présentent une assez grande analogie avec ceux qui nous ont donné la solution des problèmes C et D. Retenons seulement le résultat : *toutes les directions sont également probables, pourvu que l'on considère un temps assez long.*

Il y aurait, à ce qu'il me semble, grand intérêt à étendre ce résultat à l'énoncé général du problème G; la principale difficulté paraît être de préciser d'une manière nette la probabilité élémentaire en ce qui concerne la forme du domaine; mais le résultat ne semble pas pouvoir être douteux, quelle que soit d'ailleurs la forme adoptée pour cette probabilité élémentaire, dans laquelle on pourrait, en suivant une méthode de M. Poincaré, introduire une fonction continue arbitraire.

Lorsque nous disons d'ailleurs que toutes les directions de vitesse sont également probables, nous entendons que la probabilité pour que le point V soit sur un élément de surface $d\omega$ de la sphère S, est proportionnelle à $d\omega$. On arriverait à un résultat analogue pour la position du point P dans D. Mais nous nous bornerons au premier résultat, dont nous allons chercher les conséquences au point de vue de la théorie cinétique [1].

---

[1] On pourrait faire l'objection suivante à l'extension du problème G au cas de la théorie cinétique : le domaine D est limité, d'une part par les surfaces (1) et d'autre part par les surfaces (2). Il est assez naturel, d'après les remarques précédentes, de regarder les surfaces (1) comme partiellement indéterminées, mais ne doit-on pas regarder les surfaces (2) comme absolument fixes? Telle est l'objection. On peut y faire tout d'abord la réponse suivante : dans la réalité, les molécules ne doivent pas être regardées comme rigoureusement sphériques; elles ne le sont qu'approximativement et par suite, lorsqu'elles se choquent, la distance de leurs centres de gravité n'est pas une constante. Ceci revient à dire que les surfaces (2) doivent être remplacées par des surfaces très voisines, mais variables avec le temps, suivant une loi inconnue et arbitraire: on rentre donc bien dans l'énoncé du problème G.

A un autre point de vue, on pourrait conserver les surfaces (2), c'est-à-dire la sphéricité rigoureuse des molécules, et chercher à baser le raisonnement sur le fait

IV.

Reprenons donc le domaine à $3n$ dimensions, dans lequel les projections sur les axes de la vitesse du point P sont $v_1, v_2, \dots, v_{3n}$. Si l'on désigne par k^2 la moyenne des carrés des vitesses des molécules, on a d'ailleurs

$$(6) \qquad v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_{3n}^2 = nk^2.$$

L'équation (6) représente une hypersphère dans l'espace à $3n$ dimensions; la probabilité pour que le point V de coordonnées v_1, $v_2, \dots, v_{3n}$ soit sur un élément de surface dw (à $3n - 1$ dimensions) de cette hypersphère est proportionnelle à dw.

Cherchons quelle est la probabilité pour que v_1 soit compris entre u et $u + du$. Cela revient à chercher le rapport de la *zone* de l'hypersphère (6), comprise entre les deux plans

$$v_1 = u, \qquad v_1 = u + du,$$

à la surface totale de la sphère.

Changeant les notations pour un instant, considérons l'hypersphère

$$(6') \qquad y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_m^2 = r^2$$

et posons

$$\begin{aligned}
y_1 &= r\cos\varphi_1,\\
y_2 &= r\sin\varphi_1\cos\varphi_2,\\
y_3 &= r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cos\varphi_3,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
y_{m-1} &= r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\dots\sin\varphi_{m-2}\cos\varphi_{m-1},\\
y_m &= r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\dots\sin\varphi_{m-2}\sin\varphi_{m-1}.
\end{aligned}$$

L'élément de ~~volume~~ surface dw a évidemment pour expression

$$dw = \frac{r}{y_m}\, dy_1\, dy_2 \dots dy_{m-1}$$

---

que ces surfaces sont *convexes*, et par suite *dispersent* les trajectoires et ne les *concentrent* pas; c'est là une indication qui demanderait à être développée. Les calculs auxquels elle conduirait ne seraient pas sans analogie avec ceux de Boltzmann, mais s'en distingueraient cependant essentiellement, car ils devraient conduire au résultat en s'appuyant seulement sur la *convexité*, c'est-à-dire sur une propriété générale des surfaces (2), et non sur leur forme particulière. (*Voir* la Note II, p. 97.)

ou, en exprimant au moyen des φ_i,

$$d\omega = r^{m-1}\sin^{m-2}\varphi_1\sin^{m-3}\varphi_2\dots\sin\varphi_{m-2}\,d\varphi_1\,d\varphi_2\dots d\varphi_{m-1}.$$

L'aire de la zone que l'on obtient en faisant varier φ_1 entre φ et $\varphi+d\varphi$ est donc égale au produit de $\sin^{m-2}\varphi\,d\varphi$ par une intégrale indépendante de φ. Le rapport de cette aire à l'aire totale de la sphère est

$$\frac{\sin^{m-2}\varphi\,d\varphi}{\int_0^{\pi}\sin^{m-2}\varphi\,d\varphi}.$$

On évaluerait aisément le dénominateur, dont la valeur asymptotique pour m très grand est d'ailleurs bien connue; mais il est préférable de calculer simplement d'abord une quantité proportionnelle à la probabilité cherchée : nous avons trouvé qu'elle est proportionnelle à

$$\sin^{m-2}\varphi\,d\varphi;$$

si nous remarquons que l'on a

$$u = r\cos\varphi,$$
$$du = -r\sin\varphi\,d\varphi,$$

nous trouvons qu'elle est proportionnelle à

$$\left(1-\frac{u^2}{r^2}\right)^{\frac{m-3}{2}}du = e^{\frac{m-3}{2}\log\left(1-\frac{u^2}{r^2}\right)}du.$$

Reprenons maintenant les notations primitives; nous devons faire

$$m = 3n, \qquad r^2 = nk^2.$$

L'expression de la probabilité élementaire devient alors

$$e^{\frac{3(n-1)}{2}\left(-\frac{u^2}{nk^2}-\frac{u^4}{2n^2k^4}-\dots\right)}du$$

ou, enfin, en négligeant les termes qui renferment n en dénominateur,

$$e^{-\frac{3u^2}{2k^2}}du.$$

On devrait intégrer entre les limites $-r$ et $+r$, mais, r étant très grand par rapport à k, on peut intégrer entre $-\infty$ et $+\infty$. On a

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{3u^2}{2k^2}}du = k\sqrt{\frac{2\pi}{3}}.$$

La probabilité pour que v_1 soit compris entre u et $u + du$ est donc finalement

$$\frac{\sqrt{3}}{k\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{3u^2}{2k^2}}du;$$

c'est la loi bien connue de Maxwell.

Je n'insiste pas sur les calculs analogues : probabilité pour que le carré de la vitesse d'une molécule soit compris entre des limites données, etc., préférant terminer en précisant la signification de la loi de Maxwell au point de vue que nous avons adopté.

Le résultat que nous avons obtenu est le suivant : pour chaque molécule prise individuellement la probabilité d'une vitesse donnée est celle qu'a indiquée Maxwell. Un calcul supplémentaire, que nous omettons, montrerait de plus que, si l'on considère n' molécules parmi les n, les probabilités relatives à ces n' molécules peuvent être regardées comme indépendantes à l'approximation que nous avons faite, pourvu que $n - n'$ soit très grand ([1]).

Il résulte dès lors de la loi de Bernoulli que, parmi ces n' molécules, le nombre de celles dont la vitesse a une valeur comprise entre des limites déterminées est sensiblement égal au produit de n' par la probabilité pour que la vitesse d'une molécule soit comprise entre ces limites. Comme on peut supposer le rapport $\frac{n'}{n}$ très voisin de l'unité, tout en supposant $n - n'$ très grand, on ne commet pas une grande erreur en remplaçant dans l'énoncé précédent n' par n. On retrouve ainsi la forme que l'on donne habituellement à la loi de Maxwell.

Cette loi nous apparaît donc ainsi comme étant uniquement une loi de probabilité, et la méthode par laquelle nous l'avons établie permettrait de calculer les écarts probables et la probabilité d'un écart déterminé; c'est là une question sur laquelle je compte revenir. Mais rien n'autorise à dire que la loi de Maxwell *devient* plus probable lorsque le temps croît; tout ce que l'on peut dire, c'est qu'en multipliant les expériences, ou en les prolongeant, on permet à la loi des grands nombres de se manifester malgré les écarts passagers possibles.

Supposons, par exemple, que l'on joue à pile ou face et que je parie que, sur 1000000 de parties, on amènera pile plus de 400000 fois et moins de 600000. La probabilité pour que je gagne mon pari est

([1]) Cette restriction est nécessaire, car il est clair, pour prendre un exemple extrême, que, si l'on connaît les vitesses de $n - 1$ molécules, la vitesse de la $n^{\text{ième}}$ est déterminée : il n'y a donc pas place pour la probabilité.

colossale; il est cependant *possible* que je le perde. Mais supposons que l'on joue pendant chaque seconde quelques milliards de parties successives; je parie à chaque instant que, parmi le dernier million de parties, on a amené pile plus de 400 000 fois et moins de 600 000.

Il est clair qu'il peut arriver que je perde mon pari plusieurs fois de suite pendant une fraction de seconde, mais je pourrai affirmer avec certitude qu'il suffit de laisser s'écouler le temps pour que je gagne de nouveau. Le fait que le temps s'écoule ne modifie en rien la probabilité élémentaire; mais le temps permet à la loi des grands nombres de triompher.

Je n'ai pas à discuter ici la loi des grands nombres ni les principes même du calcul des probabilités; je me contente de conclure que la loi de Maxwell doit nous apparaître comme aussi certaine que l'affirmation qu'il y aura la semaine prochaine des décès et des naissances à Paris. Je crois que peu de gens trouveront cette certitude insuffisante; je serais heureux si les remarques précédentes pouvaient avoir le résultat de dissiper les préventions de quelques-uns à l'égard de la théorie cinétique et de décider quelques mathématiciens à approfondir un sujet à la fois intéressant et fécond.

NOTE II.

LA MÉCANIQUE STATISTIQUE ET L'IRRÉVERSIBILITÉ [1].

Il peut sembler oiseux de revenir sur un sujet à propos duquel on a tant écrit; la fréquence même des discussions ne prouve-t-elle pas cependant qu'une solution entièrement satisfaisante des difficultés que soulève l'explication mécanique des phénomènes irréversibles n'a pas encore été donnée? Je n'ai pas la prétention de fournir en quelques pages une telle solution; mais je voudrais indiquer la voie dans laquelle, à mon sens, on doit la chercher [2].

1. Mon point de départ est le suivant : la notion de la valeur numérique *exacte* d'une grandeur physique quelconque est une pure abstraction mathématique, à laquelle ne correspond aucune réalité. Je voudrais bien préciser ma pensée sur ce point, qui me paraît capital. Il s'agit, en effet, d'une question tout à fait distincte de celle de la relativité en quelque sorte métaphysique de nos connaissances [3]; je me place au point de vue du physicien et non à celui du philosophe pyrrhonien; j'admets comme certain que nos mesures sont assez exactes pour que certains rapports numériques nous soient connus avec une certaine approximation; le nombre des décimales que nous avons le droit de regarder comme *exactes* augmentera d'ailleurs avec le perfectionnement de nos techniques; mais ce nombre de décimales exactes atteindrait-il cent, atteindrait-il mille, ce qui est bien peu

---

(1) *Journal de Physique*, 1913.

(2) J'ai déjà donné quelques brèves indications sur cette voie dans mon Mémoire : *Sur les principes de la théorie cinétique des gaz* (*Annales de l'École Normale*, 1906) (Note I de cet Ouvrage). Ces indications paraissent avoir passé inaperçues, sans doute parce que les notations mathématiques que j'emploie dans ce Mémoire sont assez différentes des notations les plus usuelles. J'aurais dû, en outre, prendre la peine de montrer explicitement que mes résultats ne sont pas en contradiction avec les théorèmes généraux que Gibbs a déduits du théorème de Liouville; il est bien clair qu'une telle contradiction ne saurait exister tant qu'on n'introduit pas de nouvelles hypothèses.

(3) *Voir* la Note III.

vraisemblable, nous resterions toujours aussi éloignés de l'exactitude *absolue* avec laquelle le mathématicien définit le rapport de la diagonale au côté du carré. Non seulement pour mesurer, mais simplement pour *définir* une grandeur physique, il est nécessaire de donner des explications complémentaires d'autant plus longues que l'on veut atteindre une plus grande précision; pour une précision infinie, il faudrait des explications d'une longueur infinie, c'est-à-dire des explications qui ne pourraient jamais être données ni comprises. Si l'on suppose que l'état d'un système dépende de trois paramètres représentés par un point dans l'espace à trois dimensions, on ne doit jamais se figurer l'ensemble des systèmes pour lesquels ces paramètres satisfont à certaines conditions comme représenté par un certain volume aux contours nettement délimités (extension en phase de Gibbs, dans le cas de l'espace à $2n$ dimensions); il y a nécessairement une zone de transition entre la portion de l'espace qui appartient sûrement au volume et la portion qui ne lui appartient sûrement pas. Cette zone, que l'on peut se figurer en imaginant une sorte de flottement, un tremblotement extrêmement léger de la surface qui limite le volume, pourra être dans certains cas négligeable; mais c'est seulement après une discussion approfondie que l'on aura le droit, dans chaque question particulière, de la regarder comme rigoureusement nulle au point de vue pratique. Ce que nous venons de dire pour l'état du système s'applique évidemment aussi aux équations différentielles qui régissent son mouvement, c'est-à-dire aux actions intérieures et extérieures; là aussi il y a toujours un certain flottement inévitable.

On trouvera peut-être les remarques précédentes trop évidentes; si vraiment, en les énonçant, j'ai enfoncé une porte ouverte, j'en suis très heureux; car, une fois ce point de départ admis, les conséquences me paraissent en découler sans difficulté. Nous allons voir, en effet, quelles différences profondes séparent l'étude du problème abstrait que traite le mathématicien du problème concret qui peut seul intéresser le physicien.

2. Étudions d'abord un des problèmes abstraits les plus simples de la Mécanique : mouvement dans un plan d'un point matériel libre, qui n'est soumis à aucune force, et qui se réfléchit sur des obstacles sans perte de force vive. La vitesse algébrique étant constante, l'état de notre système dépend de trois paramètres pour lesquels nous pouvons choisir les coordonnées rectangulaires x et y et l'angle φ que fait la vitesse avec une direction fixe, angle compris entre o et 2π. Si nous posons $\varphi = z$, nous pourrons représenter chaque état du système

par un point P situé dans la portion de l'espace comprise entre les plans $z = 0$, $z = 2\pi$. Considérons tous les systèmes pour lesquels le point P est compris dans un certain domaine D_0, la valeur algébrique de la vitesse étant, bien entendu, la même pour tous ces systèmes, et supposons d'abord qu'il n'y ait pas d'obstacles. On peut déduire des théorèmes généraux de la Mécanique statistique, ou, si l'on préfère, vérifier directement par un calcul simple, que les points situés à l'origine des temps, dans le domaine D_0, seront, à une époque ultérieure, dans un domaine D *de même volume* (¹); mais la forme de D sera, en général, très différente de la forme de D_0; à mesure que le temps augmentera, l'aire de la projection sur le plan des xy ira en augmentant, et l'épaisseur parallèlement à Oz ira en diminuant. Si l'on figure la projection de D_0 sur le plan des xy (on a représenté un carré, pour fixer les idées), et un point M appartenant à la projection

Fig. 3.



de D, les valeurs de z correspondant à M ne peuvent correspondre qu'aux valeurs de φ intérieures à l'angle α sous lequel de M on voit D_0; cet angle décroît proportionnellement au temps.

Ces conclusions ne sont pas modifiées par l'introduction d'obstacles fixes limités par des droites sur lesquelles se réfléchissent les trajectoires; la seule différence est la suivante : lorsqu'il n'y a pas d'obstacles, l'extension de l'aire de la projection sur le plan des xy est illimitée; si, au contraire, nous supposons que nos points se meuvent dans une région limitée par un polygone, la projection de D ne peut pas sortir de ce polygone; elle arrivera peu à peu à le recouvrir plusieurs fois; le domaine D se composera alors de feuillets de plus en plus nombreux et de plus en plus minces.

Lorsque les obstacles sont curvilignes au lieu d'être rectilignes, il n'y a presque rien de changé non plus, si le rayon de courbure est assez grand par rapport aux dimensions du domaine primitif; il en est tout autrement si les obstacles sont des cercles extrêmement

---

(¹) De l'égalité des volumes, quelque petit que soit D_0, résulte l'invariance de ce que Gibbs appelle la *densité en phase*.

petits, analogues aux molécules sphériques de la théorie cinétique. Tout à l'heure, les valeurs de φ en un point M correspondaient à l'angle α sous lequel on voyait de M le domaine D_0; si les trajectoires, au lieu d'aller directement de D_0 en M, se réfléchissent sur un obstacle rectiligne, on devra remplacer D_0 par son image dans ce miroir et, comme nous l'avons dit, rien d'essentiel ne sera changé; si l'obstacle est un cercle de rayon très petit par rapport à la distance parcourue entre D_0 et M, tout se passera comme si un observateur placé en M regardait l'image de D_0 dans un miroir très convexe (miroir cylindrique dans le cas du plan, sphérique dans le cas de l'espace). Si l'on suppose qu'il y ait plusieurs obstacles tous pareils, cercles de rayons très petits, les longueurs des trajectoires entre ces obstacles étant dix à cent fois plus grandes que les diamètres des obstacles (1), tout se passera comme si nous avions des globes sphériques de 1^{dm} de diamètre, distants les uns des autres de quelques mètres; un objet que nous apercevrions dans l'un de ces globes après plusieurs réflexions successives aurait un diamètre apparent rendu environ dix fois plus petit par chacune des réflexions, c'est-à-dire 10^n fois plus petit, s'il y a n réflexions. Comme le nombre des réflexions est grossièrement proportionnel au temps, si la répartition des obstacles est supposée grossièrement uniforme, on voit que l'amincissement des feuillets du domaine D est maintenant, non plus proportionnel à t, mais proportionnel à e^{at}. Au bout d'un millier de réflexions (ce qui exigera un millionième de seconde si les obstacles sont répartis comme les molécules d'un gaz, la vitesse du point matériel étant égale à la vitesse moyenne de la théorie cinétique), l'épaisseur des feuillets sera de l'ordre de grandeur de 10^{-1000} et leur nombre (2), par suite, de grandeur de 10^{1000}.

3. Reprenons maintenant le même problème, mouvement d'un point matériel dans un plan, mais en supposant que les conditions abstraites irréalisables sont remplacées par des conditions plus

(1) C'est bien la relation entre les diamètres moléculaires et les libres parcours des molécules. *Voir*, par exemple, le *Recueil de constantes physiques*, p. 133.

(2) Ces résultats sont indépendants des dimensions du domaine D_0, du moment qu'elles ne sont pas trop petites. Dans la figure de la page précédente, l'angle φ ne prend effectivement toutes les valeurs comprises dans l'angle α que si cet angle α est inférieur à l'épaisseur du domaine D_0, comptée parallèlement à Oz; c'est une condition qui sera très rapidement vérifiée pour α dans le cas des réflexions successives, du moment que cette épaisseur est supérieure à 10^{-100}, par exemple, ce que nous devons admettre en raison de l'indétermination des données, n'y eût-il pas d'autre cause d'indétermination.

concrètes [1]. Le point matériel considéré est, par exemple, le centre de gravité d'une molécule; mais l'absence *absolue* de force extérieure, la conservation *absolue* de la force vive, la fixité *absolue* des obstacles, la détermination *absolue* de leur forme géométrique ne seront plus supposées, mais remplacées par des hypothèses *relatives*. Ces hypothèses devront laisser place à un certain flottement dans les limites du domaine D_0 et des domaines D qui s'en déduisent; on constatera facilement qu'un déplacement de 1^{cm} imprimé à une masse de 1^g, située dans une étoile, se traduit par une variation du champ de gravitation qui dépasse de beaucoup la fraction 10^{-100} des champs usuels. Il nous est donc impossible, à moins d'introduire l'univers entier dans nos équations (et la question se poserait alors de savoir si l'univers est fini), de ne pas admettre un flottement de l'ordre de grandeur 10^{-100} par rapport aux unités usuelles. Mais alors la structure infiniment feuilletée acquise par notre domaine D au bout d'un millionième de seconde est beaucoup trop fine pour être conservée; les feuillets dont l'épaisseur était de l'ordre de 10^{-1000} débordent les uns sur les autres et le domaine D se trouve remplir entièrement l'espace dans lequel le calcul abstrait ne lui attribuait qu'un volume égal au volume initial D_0. C'est ici que disparaît la conservation de la densité en phase; nous obtenons, au contraire, une répartition en phase sensiblement moins dense que la répartition primitive, mais d'étendue beaucoup plus grande; le même raisonnement peut être recommencé d'ailleurs pour une très petite portion quelconque de cette nouvelle répartition, et ainsi de suite.

4. Les mêmes raisonnements s'appliqueraient à l'étude des problèmes plus généraux de la théorie cinétique. Ils permettent de répondre à une objection souvent répétée.

Cette objection, soulevée pour la première fois par Loschmidt en 1876, est la suivante : Si l'on change les signes de toutes les vitesses, ce qui revient à changer le signe du temps, les équations de la Dynamique ne sont pas modifiées; ces équations ne permettent donc pas de prévoir dans l'avenir une évolution différente de ce que serait l'évolution si l'on remontait vers le passé (en changeant le signe du temps). Les remarques précédentes montrent nettement quel est le

(1) Nous devrions nous placer dans l'espace et non dans le plan; mais il n'y a, en réalité, pas de différence profonde entre les deux problèmes, et nous conservons l'avantage d'une représentation géométrique des phases dans l'espace ordinaire.

rôle joué par le temps et permettent de comprendre pourquoi il n'est pas possible d'en renverser le sens; le présent laisse l'avenir indéterminé, mais on ne peut parler d'indétermination du passé. L'indétermination de l'avenir est, bien entendu, relative à nos moyens d'investigation et de calcul; elle disparaît d'ailleurs si nous nous contentons, comme il est naturel, de la connaissance de l'état le plus probable, c'est-à-dire des portions du domaine D qui conduisent à des résultats identiques, et qui sont immensément étendues par rapport aux autres portions de ce domaine, portions qui conduiraient à des résultats exceptionnels. Je n'insiste pas sur ce point, sur lequel tout le monde est d'accord. On a souvent cherché à donner une idée de l'extrême rareté des cas exceptionnels, rareté qui dépasse tout ce que notre imagination peut concevoir; voici une comparaison qui me paraît particulièrement frappante. Concevons qu'on ait dressé 1 million de singes à frapper au hasard sur les touches d'une machine à écrire et que, sous la surveillance de contremaîtres illettrés, ces singes dactylographes travaillent avec ardeur 10 heures par jour avec 1 million de machines à écrire de types variés. Les contremaîtres illettrés rassembleraient les feuilles noircies et les relieraient en volumes. Et, au bout d'un an, ces volumes se trouveraient renfermer la copie exacte des livres de toute nature et de toutes langues conservés dans les plus riches bibliothèques du monde. Telle est la probabilité pour qu'il se produise, pendant un instant très court, dans un espace de quelque étendue, un écart notable de ce que la Mécanique statistique considère comme le phénomène le plus probable. Supposer que cet écart ainsi produit subsistera pendant quelques secondes revient à admettre que, pendant plusieurs années, notre armée de singes dactylographes, travaillant toujours dans les mêmes conditions, fournira chaque jour la copie exacte de tous les imprimés, livres et journaux, qui paraîtront la semaine suivante sur toute la surface du globe. Il est plus simple de dire que ces écarts improbables sont purement impossibles.

5. La théorie dont j'ai esquissé les grandes lignes se distingue très nettement des théories basées sur les hypothèses ergodiques, mais a cependant certains points communs avec ces dernières et exigerait, comme elles, des recherches nouvelles pour être rendue complètement rigoureuse au point de vue mathématique; mais les difficultés me paraissent bien moins profondes lorsqu'on adopte le point de vue plus réel auquel j'ai essayé de me placer. Dans les théories de Boltzmann et dans celles de Gibbs, une place privilégiée est faite au théorème de Liouville, à la conservation de l'extension en phase; ce théorème

est fort intéressant au point de vue mathématique, mais je crois que la décroissance exponentielle des dimensions des éléments d'extension cohérents entre eux lui enlève toute signification physique; sans même qu'il soit besoin de faire appel à la notion de la discontinuité des probabilités qui résulterait de la théorie des quanta, on doit regarder comme une pure abstraction la notion de la conservation du volume, lorsque ce volume se divise en feuillets dont l'épaisseur s'exprimerait, au bout d'une seconde, par un nombre décimal comportant des milliards de zéros après la virgule.

6. Il me semble difficile de ne pas dire, en terminant, quelques mots des remarques de Boltzmann sur l'application du deuxième principe à l'univers. Comme le dit fort justement Boltzmann, « assurément personne ne prendra de telles spéculations pour d'importantes découvertes, ni pour le but le plus élevé de la science, comme le faisaient les anciens philosophes. Mais il n'est pas certain qu'il soit juste de les tourner en dérision et de les regarder comme tout à fait oiseuses ». Boltzmann développe une conception mécanique de l'univers, dans laquelle il se produit, çà et là, des passages d'un état plus probable à un état moins probable, de sorte que, pour l'univers entier, l'irréversibilité n'existe pas. Cette conception est rigoureuse au point de vue abstrait si l'univers est un système mécanique pouvant être défini par un nombre fini de paramètres dont le champ total de variation est fini, mais elle ne me paraît pas acceptable, si l'on adopte le point de vue réel que j'ai cherché à préciser. Admettons, pour un instant, que nous puissions accepter cette image pour l'univers que nous voyons, c'est-à-dire que nous puissions fixer un nombre très grand R, tel qu'il n'y ait jamais rien à l'extérieur de la sphère S de rayon R; cette sphère S sera notre univers; l'évolution de cet univers sera, d'après un théorème de Poincaré, aussi voisine que l'on veut d'une évolution périodique et, dans des périodes immensément longues, les phénomènes en contradiction avec le second principe y seront aussi fréquents que les phénomènes en accord avec ce principe. En laissant même de côté les difficultés, cependant à mon avis insurmontables, entraînées par l'hypothèse que rien ne sort de la sphère S, il faut observer que la conclusion n'est rigoureuse qu'autant que nous supposons *absolue* l'inexistence de toute action extérieure à S. Imaginons, avec O. Chwolson [1], une sphère S_2 dont les dimensions par rapport à S seraient celles de S par rapport à un atome, puis une

---

[1] *Scientia*, t. VIII, 1910, pages 41 (texte) et 45 (suppl.).

sphère S_3 qui serait à S_2 ce que S_2 est à S, et ainsi de suite jusqu'à une sphère S_n dont l'indice n serait égal à 1 million. Pour que l'application à S de la théorie mécanique de la quasi-périodicité due à Poincaré fût légitime, il faudrait que nous fussions assurés qu'il n'y a pas, aux confins de S_n, quelque univers S' de mêmes dimensions que S, bien que probablement très différent de S et pouvant, dans le cours des temps, agir sur S. Car la durée des temps nécessaires pour l'application du théorème de Poincaré est tellement longue qu'une rencontre de S avec S' serait infiniment probable, bien avant que ces temps fussent écoulés. Ceci revient à dire qu'il est au moins aussi vraisemblable de supposer que les lois de notre univers seront complètement modifiées par une combinaison avec un autre univers (actuellement infiniment plus éloigné de lui qu'un atome situé sur la Terre n'est éloigné d'un atome situé sur Sirius) que de supposer un changement de sens appréciable dans la variation de l'entropie. Nous ne pourrions aller plus loin qu'en spéculant sur l'infini; ce ne serait plus du tout de la physique.

NOTE III.

LA RELATIVITÉ DE L'ESPACE D'APRÈS M. HENRI POINCARÉ [1].

Cet article [2] est rempli, comme tout ce qu'écrit M. Poincaré, de vues profondes et sa lecture est suggestive par tout ce qu'elle apporte d'idées nouvelles et parfois imprévues. Je ne me hasarderai pas à résumer ces pages que chacun lira ; mais je voudrais essayer d'indiquer sur quels points il ne m'est pas possible d'être d'accord avec M. Poincaré. Il me semble que, tout en proclamant la relativité de l'espace, il croit savoir ce que c'est que l'espace « en soi ». sinon que pourraient signifier des phrases comme celle-ci :

« Supposons que, dans une nuit, toutes les dimensions de l'univers deviennent mille fois plus grandes : le monde sera resté *semblable* à lui-même, en donnant au mot de *similitude* le même sens qu'au troisième Livre de Géométrie. Seulement ce qui avait 1^m de long mesurera désormais 1^{km} (p. 2). »

« Nous avons si peu l'intuition de la distance en soi que, dans une nuit, nous l'avons dit, une distance pourrait devenir mille fois plus grande sans que nous puissions nous en apercevoir, si toutes les autres distances avaient subi la même altération (p. 5). »

Je dois avouer que mon esprit ne peut attribuer de sens à ces hypothèses, à moins qu'elles n'aient simplement pour objet de nous rappeler que notre connaissance est bornée à des systèmes de relations et par suite ne peut déceler toutes les modifications qui laissent immuables ces systèmes de relations. Mais c'est là une thèse philosophique générale, que personne ne songe plus à contester. Toute la question est de savoir quel usage il convient qu'en fasse le savant. Or sur ce point, je me sépare de M. Poincaré. Si toutes les dimensions de l'univers devenaient mille fois plus grandes, comme nous ne pourrions nous en apercevoir en aucune manière, c'est donc que

---

(1) *Revue du Mois*, juillet 1907.

(2) *Année psychologique*, treizième année, 1907, p. 1-17.

l'univers n'aurait pas changé. Nous devons donc affirmer en toute rigueur que ce phénomène ne s'est pas produit la nuit dernière : rechercher s'il s'est produit n'aurait un sens que si nous connaissions un espace *absolu* à qui reporter cet espace *relatif*.

M. Poincaré prévoit bien ces objections quand il parle de la théorie de Lorentz-Fitzgerald, d'après laquelle les longueurs matérielles sont diminuées dans le sens du mouvement. Cette théorie n'a un sens que si l'on prend comme *espace absolu* le milieu dans lequel se produisent les phénomènes lumineux, milieu dans lequel la vitesse de la lumière est supposée être la même dans toutes directions. Les physiciens ont des raisons assez sérieuses pour admettre cette théorie, qui entraînerait une modification extrêmement faible dans certaines mesures de longueur. Que ces modifications soient extrêmement faibles, peu importe à M. Poincaré car « elles pourraient être plus fortes ». Il semble bien ici que le langage de M. Poincaré risque d'entraîner à quelque confusion. Cet espace absolu qu'il ne connaît point, mais dont le mirage le hante, lui paraît-il pouvoir déformer fortement certains termes des relations physiques, sans entraîner dans les autres termes des modifications correspondantes ? auquel cas on ne comprendrait plus comment nos mesures de la vitesse de la lumière peuvent réussir. Ou bien veut-il répéter simplement que les modifications réelles échappent à la connaissance, parce que nous ne saisissons que des relations ? Mais alors pourquoi dit-il que nous ne connaissons pas la « véritable vitesse » du Soleil ? Il faut donc conclure que, précisément, ces modifications dues à une concordance imparfaite entre nos différents systèmes de mesure, *ne pourraient pas être plus fortes*. Notre connaissance des phénomènes physiques n'est peut-être pas assez complète pour que nous puissions affirmer que notre science des relations spatiales est exacte à un millionième près ; mais elle est assurément suffisante pour que nous soyons *certains* qu'elle l'est à un dixième près (¹). Cela suffit pour que nous ayons de l'espace expérimental (²) une notion suffisamment stable, non point relative au sens où M. Poincaré entend le mot relatif.

Elle n'a pas l'exactitude *absolue* qui ne saurait appartenir à aucune notion expérimentale, mais cette exactitude est approchée et l'appro-

(¹) L'erreur possible est assurément inférieure à un dixième. Il est évident qu'il y a les mêmes difficultés à fixer *exactement* la limite supérieure de l'erreur qu'à supprimer toute erreur.

(²) Je laisse ici complètement de côté la discussion de la conception psychologique et métaphysique de l'espace, comme forme indépendante de tout contenu. Cette conception n'a rien à voir avec la question ici discutée.

ximation devient de plus en plus précise à mesure que notre science se perfectionne.

Le relativisme de M. Poincaré semble tenir à ce que l'éminent géomètre rapporte toutes nos connaissances à un absolu auquel il doit croire, puisqu'il le prend comme norme. De plus, il excelle à tirer parti, en les généralisant, des singularités analytiques qui se rencontrent dans nos théories imparfaites. Mais cette généralisation risque d'entraîner, chez des esprits moins au courant que le sien des questions qu'il traite, des illusions très graves. On en a un exemple dans l'interprétation inexacte qui a été donnée à ses observations sur la relativité du mouvement de la terre. Il n'était donc peut-être pas inutile de préciser que ses idées sur la relativité de l'espace sont des idées de métaphysicien et non de savant : l'appareil scientifique qui les entoure n'ajoute rien au doute métaphysique de l'existence des objets extérieurs (¹).

Mais les développements analytiques de M. Poincaré risquent de donner au lecteur, hynoptisé par l'appareil mathématique, l'impression que dans l'affirmation de cette relativité, il y a autre chose que l'attitude métaphysique primitive.

C'est cette illusion que j'ai essayé de signaler brièvement ici.

(¹) « L'hypothèse de la rotation de la terre conserverait le même degré de certitude que l'existence même des objets extérieurs. » Henri POINCARÉ, *La valeur de la Science*, p. 272.

NOTE IV.

QUELQUES REMARQUES SUR LA THÉORIE DES RÉSONATEURS [1].

1. Dans toutes les théories mécaniques et physiques, on se trouve forcément conduit à écrire des équations approchées, et à raisonner comme si ces équations étaient exactes. Il est des cas très nombreux où les théorèmes classiques sur la continuité des intégrales des équations différentielles permettraient de légitimer rigoureusement cette manière de procéder; mais *il n'en est pas toujours ainsi*. Et cependant, dans certaines théories physiques, on suppose essentiellement que certaines équations sont vérifiées avec une exactitude mathématique *absolue*; on admet par exemple, que les équations différentielles ont la forme hamiltonienne; on admet aussi, parfois dans le même raisonnement, que le second principe de la thermodynamique est vérifié partout et toujours d'une manière rigoureuse; ces deux hypothèses ne sont cependant compatibles entre elles que si l'on néglige certaines probabilités extrêmement faibles; absolument parlant, elles sont contradictoires. Il n'est donc peut-être pas inutile de montrer sur un exemple précis, comment la présence de termes, *aussi petits que l'on veut*, peut modifier complètement l'allure d'un phénomène défini par une équation différentielle très simple.

2. Par un choix convenable des unités, l'équation différentielle du mouvement d'un résonateur linéaire se met sous la forme

$$(1)\qquad \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + x^2 = a^2;$$

cette équation exprime que la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle est constante; on déduit de cette équation que *le mouvement est périodique*, *la période* (égale à 2π avec les unités choisies), *ayant une valeur indépendante des conditions initiales*.

Supposons maintenant que, sous l'influence d'une cause extérieure

---

[1] *Société française de Physique*, séance du 21 juin 1912.

que je ne précise pas, l'énergie du résonateur varie avec le temps, et considérons d'abord le cas où cette variation est linéaire; l'équation (1) doit alors être remplacée par

$$(2) \qquad \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + x^2 = a^2 + 2\lambda t,$$

λ étant une constante. Le point sur lequel je veux attirer l'attention est le suivant : quelque petit que soit λ, *l'intégrale de l'équation* (2) *n'est pas périodique* : le point matériel d'abscisse x se déplace toujours dans le même sens; la démonstration se déduit très aisément de l'équation obtenue en dérivant (2) par rapport à t.

Les conséquences seraient analogues pour un résonateur à deux dimensions : si, à l'intégrale des forces vives modifiée par un terme en λ

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + r^2 = a^2 + 2\lambda t$$

on adjoint l'intégrale des aires, supposée vérifiée, indépendamment de λ,

$$r^2\frac{d\theta}{dt} = C;$$

on constate que, en passant du cas où λ est nul au cas où λ est aussi petit que l'on veut, il se produit une discontinuité : *le mouvement elliptique de période fixe se transforme en un mouvement quasi-circulaire dont la période*, dépendant du rapport des axes de l'ellipse, *peut avoir une valeur quelconque* [1].

3. La constance des périodes d'émission paraissant être un fait expérimental inévitable, on déduit de ce qui précède que, *si la fonction qui représente l'absorption ou l'émission d'énergie par un résonateur admet une dérivée, cette dérivée doit s'annuler avec une périodicité égale à la période propre du résonateur*. Mais ce résultat particulier me paraît moins important que le fait même de la discontinuité due à la présence d'un terme en λ aussi petit que l'on veut.

4. En terminant je voudrais faire sur la théorie des résonateurs une autre remarque qui me paraît indépendante des précédentes. On

---

[1] On trouvera le développement des calculs dans un Mémoire publié dans les *Annali di Matematica*, 3e série, t. XXI, 1913 (second des Volumes consacrés à la mémoire de Lagrange).

sait quelles difficultés résultent du fait que la théorie de l'équipartition de l'énergie n'est pas conciliable avec l'hypothèse difficilement évitable de l'existence dans l'éther d'une infinité de degrés de liberté. Si l'on admet cette dernière hypothèse, le seul moyen d'échapper à la dissipation intégrale de l'énergie dans l'éther paraît être l'hypothèse suivante : *à chaque température, il y a une probabilité déterminée pour que chaque degré de liberté entre en jeu et ces probabilités forment une série convergente ;* l'hypothèse de Planck correspond au cas particulier où la série se réduit à un nombre limité de termes, tous les autres termes étant nuls; la série est alors forcément convergente. L'étude de l'hypothèse plus générale que la série est convergente tout en ayant une infinité de termes, conduirait à utiliser la notion de probabilité dénombrable; on retrouve aisément par cette voie ce fait, qu'il peut y avoir une probabilité finie pour l'énergie nulle de l'éther, et une probabilité infiniment petite pour une énergie infiniment petite [1].

A la suite de la Communication de M. Borel, M. A. Guillet *lui a adressé la Note suivante :*

« Par un exemple simple et typique, vous nous avez montré à quelles contradictions nous serions exposés en étendant, sans circonspection, aux phénomènes physiques, des déductions pourtant exactes au point de vue mathématique. Il est bon que ces choses soient dites par des mathématiciens qualifiés, mais il y a une forme de raisonnement que je me permets de vous soumettre comme plus familière, peut-être, aux physiciens.

» Il est tout à fait légitime d'écrire deux équations telles que les suivantes:

$$(1)\qquad \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = x^2 - a^2;$$

$$(2)\qquad \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = x^2 - a^2 - \lambda t.$$

et d'en comparer les solutions

$$\varphi(x, t) = 0, \qquad \psi(x, t) = 0.$$

» Mais il n'en est plus de même lorsque les termes de ces équations, perdant leur sens abstrait, doivent, comme c'est le cas dans l'exemple que vous avez choisi, mesurer de l'*énergie*. Car cette grandeur est susceptible de plusieurs formes à chacune desquelles correspond une expression spéciale, composée avec des paramètres propres à chaque espèce de phénomènes. Et dans le cas du pendule, on a seulement le choix entre les énergies potentielle et cinétique de configuration; le mouvement spontané du système ne pourra donc être modifié par l'intervention

---

(1) *Voir* Émile Borel, *Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques* (*Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, t. XXVII, 1907).

d'une énergie auxiliaire qu'autant que celle-ci sera introduite dans le système sous l'une des formes *assimilables* : par percussion, action continue adjointe à la pesanteur, etc.

« S'il en était autrement, l'énergie considérée serait en *disponibilité* dans le système, mais non point absorbée, c'est-à-dire répartie sous les formes actives et convertibles les unes dans les autres. *Ainsi, en aucun cas, l'équation* (2) *ne saurait avoir un sens physique* : s'il s'agit d'une localisation, on ne peut faire que le total énergétique du système, et s'il s'agit d'une absorption efficace, l'énergie ne saurait être exprimée sous la forme algébrique λt qui n'est pas la forme sous laquelle une énergie assimilée par le pendule peut figurer dans l'histoire de son mouvement. »

M. Hadamard observe que, dans l'exemple cité par M. E. Borel, on opère sur l'équation des forces vives, c'est-à-dire sur l'équation de la dynamique modifiée par multiplication par x'.

On sait que cette multiplication (qui est un artifice d'intégration) introduit une solution étrangère : à certains moments, l'équation obtenue cesse d'être équivalente à l'équation véritable qui régit le phénomène. C'est précisément à ce moment que s'introduisent d'une part, pour l'équation primitive ($\lambda = 0$), une solution singulière et d'autre part, pour $\lambda \neq 0$, la circonstance remarquable signalée par M. Borel qui est liée indissolublement à l'existence de cette solution.

M. Borel, à propos des remarques de M. Hadamard, fait observer que, il y a 20 ans, la forme énergétique aurait paru plus naturelle et plus simple que l'équation du second ordre; aujourd'hui, il n'en serait peut-être pas absolument de même, en raison de l'importance attachée au groupe de Lorentz; les équations énergétiques continuent cependant à jouer un rôle important en Mécanique statistique et dans la théorie de l'équipartition; il est peut-être excessif de les considérer comme un pur jeu de formules, sans intérêt physique, ne correspondant qu'à un artifice analytique. En fait, ces équations sont utilisées; il faut donc savoir dans quelle mesure on peut y faire des approximations.

La remarque de M. Guillet ainsi que des remarques fort curieuses faites en séance par M. H. Abraham soulignent, au point de vue des physiciens, le fait que le résultat mathématique obtenu contredit l'expérience; c'est bien ainsi qu'il a été présenté, non pour mettre en doute les résultats expérimentaux, mais pour mettre en évidence les défauts de certains raisonnements par continuité. Quand au surplus de l'observation de M. Guillet, il semble que tout revienne à définir ce que l'on appelle *énergie absorbée*; il s'agissait pour M. Borel de l'énergie absorbée par le degré de liberté considéré.

NOTE V.

SUR UN PROBLÈME DE PROBABILITÉS GÉOMÉTRIQUES.

Certains phénomènes physiques (notamment l'émission des particules α du radium) conduisent à étudier un problème de probabilités, auquel on peut donner la forme géométrique suivante.

PROBLÈME I. — *Des points sont distribués au hasard sur une droite indéfinie, de telle manière qu'il y en ait en moyenne un par unité de longueur. Quelle est la probabilité pour qu'il y en ait précisément n dans un intervalle de longueur donnée x?*

Pour résoudre ce problème d'une manière élémentaire et sans utiliser les propriétés des intégrales eulériennes, supposons d'abord que la droite ne soit pas illimitée, mais ait une longueur très grande L et renferme N points; par hypothèse, le rapport $\frac{N}{L}$ tendra vers l'unité lorsque L augmentera indéfiniment.

Soit ϖ_n la probabilité pour que l'intervalle donné x renferme n points *déterminés* parmi les N points situés dans l'intervalle total L et p_n la probabilité pour que l'intervalle x renferme n points non spécifiés; on a évidemment

$$p_n = \varpi_n \frac{N!}{n!(N-n)!}.$$

On peut écrire de même

$$p_{n+1} = \varpi_{n+1} \frac{N!}{(n+1)!(N-n-1)!}$$

et l'on en déduit

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{\varpi_{n+1}}{\varpi_n} \frac{N-n}{n+1}.$$

Nous allons évaluer le rapport $\frac{\varpi_{n+1}}{\varpi_n}$; désignons par $A_1, A_2, \dots A_n, A_{n+1}$, $n+1$ points déterminés, par ϖ_n la probabilité pour que $A_1, A_2, \dots, A_n$ soient dans l'intervalle donné, tous les autres A étant en

dehors et par ϖ_{n+1} la probabilité pour que $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$, soient dans l'intervalle donné, tous les autres A étant en dehors. Dans les deux cas, les points $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont dans l'intervalle, et les points $A_{n+2}, \ldots, A_N$ sont en dehors; la différence entre les deux cas est que, pour la probabilité ϖ_{n+1}, le point A_{n+1} est dans l'intervalle x, tandis que pour la probabilité ϖ_n, ce point est dans l'intervalle $L - x$; on a donc

$$\frac{\varpi_{n+1}}{\varpi_n} = \frac{x}{L - x}.$$

On en conclut

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{x}{n+1} \frac{N - n}{L - x}.$$

Si nous faisons croître L indéfiniment, le rapport $\frac{N}{L}$ tend vers l'unité, n et x restant fixes, et l'on a, à la limite,

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{x}{n+1}.$$

On conclut de là

$$p_n = p_0 \frac{x^n}{n!},$$

et, comme on a évidemment

$$\sum_0^\infty p_n = 1,$$

il en résulte

$$p_0 e^x = 1,$$

$$p_n = \frac{x^n}{n!} e^{-x}.$$

On arrive au même résultat d'une manière encore plus simple en faisant subir au problème géométrique une transformation que je vais exposer, car elle peut être utile dans d'autres questions.

Observons d'abord en passant que le problème géométrique pourrait être énoncé en prenant pour base au lieu du continu à une dimension, le continu à 2, 3, ou un nombre quelconque de dimensions. On peut, par exemple, prendre l'énoncé suivant :

Problème II. — *Étant donnés dans un plan indéfini des points distribués au hasard, à raison d'un en moyenne par unité de surface, quelle est la probabilité pour qu'il y en ait précisément n dans un domaine* D *d'aire donnée x?*

Au sujet de ce problème, on peut observer incidemment que si la

forme du domaine D est supposée absolument indéterminée, on n'altère pas la généralité en supposant la distribution des points régulière, par exemple, aux sommets d'un quadrillage.

Qu'il s'agisse d'ailleurs du problème linéaire ou du problème plan, nous pouvons décomposer le domaine D d'étendue x en N domaines d'étendue $\frac{x}{N}$; si l'on fait croître N indéfiniment, la probabilité pour qu'un de ces domaines partiels puisse renfermer plus d'un point, deviendra négligeable pour N infini.

La probabilité pour qu'il y ait un point dans le domaine d'étendue $\frac{x}{N}$ est évidemment $\frac{x}{N}$ lorsque N est ainsi très grand, et la probabilité pour qu'il n'y en ait aucun est la probabilité complémentaire à l'unité, c'est-à-dire $1-\frac{x}{N}$.

Pour qu'il y ait précisément n points dans le domaine D d'étendue x, il faut et il suffit que n des N domaines partiels $\frac{x}{N}$ renferment un point et que les $N-n$ autres n'en renferment aucun. Si l'on suppose spécifiés les n domaines partiels qui doivent renfermer un point, cette probabilité est

$$\left(\frac{x}{N}\right)^n\left(1-\frac{x}{N}\right)^{N-n}.$$

Mais les n domaines peuvent être choisis de $C_N^n=\frac{N!}{n!(N-n)!}$ manières différentes et ces choix divers conduisent à des hypothèses qui s'excluent mutuellement; la probabilité totale est donc

$$\left(\frac{x}{N}\right)^n\left(1-\frac{x}{N}\right)^{N-n}\frac{N(N-1)\ldots(N-n+1)}{n!},$$

ce qui donne bien, pour N infini, la valeur déjà trouvée

$$\frac{x^n}{n!}e^{-x}.$$

Désignons par p_n cette probabilité et supposons qu'une grandeur u prenne la valeur u_n lorsque l'évènement auquel correspond cette probabilité p_n est réalisée; la valeur moyenne de u sera par définition

$$\bar{u}=\Sigma p_n u_n.$$

Lorsque x augmente indéfiniment, $\bar{u}$ tend évidemment vers la

limite de u_n, si u_n tend vers une limite pour n infini. Mais il peut arriver que u_n ne tende vers aucune limite et que $\bar{u}$ tende cependant vers une limite pour x infini. Cette limite est alors ce que j'ai appelé la *limite généralisée* de u_n dans mes recherches sur les séries divergentes sommables par la méthode de sommation exponentielle.

En d'autres termes, si une quantité variable u_n dépend du nombre n de points se trouvant dans l'intervalle x, la limite de la valeur moyenne de u_n, lorsque x augmente indéfiniment, peut exister alors que u_n ne tend vers aucune limite pour n infini.

Mais je ne puis insister ici sur le détail de la méthode de sommation exponentielle, que j'ai exposée dans mes Leçons sur les séries divergentes.

NOTE VI.

LA CINÉMATIQUE DANS LA THÉORIE DE LA RELATIVITÉ (1).

J'ai reçu récemment de M. Varićak une réclamation de priorité, d'ailleurs très courtoise, à propos du deuxième paragraphe de ma Note sur *la théorie de la relativité et la cinématique* (2). J'aurais dû, en effet, si je les avais connues, mentionner les publications où M. Varićak utilise la géométrie de Lobatchefski pour l'étude de la cinématique dans la théorie de la relativité. Je suis très heureux d'avoir l'occasion de réparer cette omission (3). Je voudrais en même temps préciser ce qui distingue, à ce qu'il me semble, le point de vue que j'ai adopté.

Je n'insisterai pas sur les avantages du langage de *l'espace cinématique* (4), bien que ce langage facilite singulièrement les applications du genre de celles qui sont indiquées dans les derniers paragraphes de ma Note citée. La forme que j'ai donnée au théorème d'addition des vitesses n'est pas en effet nouvelle seulement par le langage, mais surtout par la symétrie des notations. Ce point ne paraissant pas avoir été bien compris, faute sans doute d'explications suffisantes, je vais tâcher de l'élucider de mon mieux.

La théorie de la relativité suppose la contraction de Lorentz, c'est-à-dire le fait que les observations faites sur un système ne donnent

(1) *Comptes rendus*, t. 157, 27 octobre 1913, p. 703.

(2) *Voir* plus haut, p. 51-54.

(3) *Ueber die nichteuclidische Interpretation der Relativtheorie* (Conférence faite à Karlsruhe le 26 septembre 1911 : *Jahresbericht der deutschen Mathematiker Vereinigung*, t. XXI, 1912, p. 103). M. Varićak avait d'ailleurs antérieurement publié des Notes dans la *Physikalische Zeitschrift*, février et avril 1900 et aussi un travail en langue serbe à la fin de 1910. M. Alfred Robb est arrivé de son côté à des résultats analogues dans *Optical Geometry of mention; a new view of the theory of relativity*, Cambridge, 1911.

(4) Cette expression a été adoptée par M. Kimosuke Ogura dans sa Note *On the Lorentz Transformation with some geometrical Interpretations* (*Science Reports of the Tôhoku Imperial University*, Vol. II, n° 2, 1913). M. Ogura, qui se réfère cependant à ma Note, ne paraît pas avoir vu tous les avantages de la forme symétrique que j'ai adoptée ; il reproduit, en effet, l'énoncé dissymétrique dont je vais parler tout à l'heure.

pas les mêmes résultats, suivant que les observateurs sont en repos ou en mouvement par rapport au système observé. Si l'on admet ce point de départ, il me semble évident qu'on devra s'efforcer, pour avoir des énoncés cohérents et exempts de pétitions de principes, de *ne faire intervenir dans les énoncés que des mesures faites, dans chaque système, par des observateurs liés au système*. C'est pourquoi l'énoncé, souvent reproduit, d'après lequel la direction de la résultante de deux vitesses dépend de l'ordre dans lequel on les compose, me paraît défectueux. Bien entendu, je ne prétends pas qu'on ne puisse pas faire des conventions de langage telles que cet énoncé soit correct; mais ces conventions de langage ne me paraissent pas les meilleures, car elles risquent de conduire à des confusions.

Voici comment se pose, à mon avis, le problème de la composition des vitesses dans la théorie de la relativité. *Étant donné un système* A, *par rapport auquel on a mesuré les vitesses de deux systèmes* B *et* C, *déterminer, au moyen de mesures faites à l'intérieur des systèmes* B *et* C, *la vitesse d'un quatrième système* D *par rapport à* A. Le problème est résolu par la remarque qu'il existe un tétraèdre ABCD dans l'espace à courbure constante négative (courbure égale à la vitesse de la lumière), tel que les longueurs des arêtes soient les *vitesses vraies relatives*, les angles en A, par exemple, étant les angles que font entre elles les vitesses AB, AC, AD, *pour l'observateur lié à* A.

Il est clair que si l'on donnait seulement la vitesse de B par rapport à A (mesurée dans A) et les vitesses de D et de A par rapport à B, ainsi que leur angle (mesurés dans B), on ne pourrait pas en déduire la position exacte dans A de la vitesse de D par rapport à A; on connaîtrait en effet seulement la valeur absolue de cette vitesse et l'angle qu'elle fait avec la vitesse de B par rapport à A; pour connaître son plan, il faudrait, en outre, admettre qu'on connaît la correspondance entre des plans observés dans B et des plans observés dans A; comme il suffirait d'utiliser les plans qui passent par la vitesse relative de A et de B, cette correspondance est ici très simple; mais sa connaissance exige cependant que l'on considère des observations simultanées faites dans B et dans A par deux observateurs respectivement au repos dans chacun des deux systèmes.

Voici comment on procédera pour éliminer ce genre d'observations: l'observateur A fixera dans l'espace A les positions AB et AC des vitesses de B et C par rapport à A. Ensuite l'observateur B mesurera la valeur de la vitesse BD et les angles qu'elle fait, dans l'espace B, avec les vitesses BA et BC; l'observateur C fera des mesures analogues

dans son espace C. La connaissance numérique des mesures faites par les observateurs B et C permettra à l'observateur A, grâce à la règle du tétraèdre, de fixer en grandeur et en position la vitesse AD. Sous cette forme parfaitement symétrique, il ne peut pas être question d'interversion de l'ordre dans lequel sont ajoutées les vitesses. D'autre part, il me semble qu'on gagne beaucoup de netteté en supposant comme nous l'avons fait, que dans chaque espace les mesures sont faites par un observateur au repos, et que les divers observateurs n'ont à se communiquer entre eux que les résultats numériques de ces mesures, sans avoir à utiliser un fait géométrique tel que la coïncidence de deux plans observés séparément dans les deux espaces. Si l'on cherchait à concevoir une vérification expérimentale des conséquences cinématiques de la théorie de la relativité, il semble bien qu'on ne pourrait éviter tout cercle vicieux qu'en limitant ainsi à des transmissions de résultats numériques les communications entre des observateurs qui seraient en mouvement les uns par rapport aux autres.

NOTE VII.

LES THÉORIES MOLÉCULAIRES ET LES MATHÉMATIQUES [1].

I

Les relations entre les Sciences mathématiques et les Sciences physiques sont aussi anciennes que ces sciences elles-mêmes; c'est l'étude des phénomènes naturels qui conduisit l'homme à se poser les premiers problèmes desquels, par l'abstraction et la généralisation, est sortie la complexité superbe de la science des nombres et de l'espace. Inversement, par une sorte d'harmonie préétablie, il est souvent arrivé que certaines théories mathématiques, après s'être développées en apparence fort loin de la réalité, se sont trouvées fournir la clef de phénomènes auxquels ne pensaient nullement les créateurs de ces théories. L'exemple le plus célèbre de ce fait est la théorie des sections coniques, pur objet de spéculation pour les géomètres grecs, dont les recherches ont permis à Képler, 20 siècles plus tard, d'énoncer avec précision les lois des mouvements des planètes. De même, dans la première moitié du XIXe siècle, c'est grâce à la théorie des exponentielles imaginaires que fut approfondie l'étude des mouvements vibratoires, dont l'importance s'est révélée si grande dans la Physique et même dans l'industrie; c'est à cette étude que nous devons la télégraphie sans fil et la transmission de l'énergie par courants polyphasés. Plus récemment encore, on sait quelle a été l'utilité de la théorie abstraite des groupes dans l'étude des idées si profondes et si nouvelles par lesquelles on a tenté d'expliquer les résultats des expériences capitales de Michelson sur la relativité.

Mais ces exemples, quelle qu'en puisse être l'importance, sont particuliers et se rapportent à des théories particulières : combien plus frappant encore est l'usage universel des formes imposées à la

---

(1) Conférence faite à Houston (Texas), à l'occasion de l'inauguration de l'Institut Rice (10-12 octobre 1912) (*Revue générale des Sciences*, 30 novembre 1912).

pensée scientifique par le génie des Descartes, des Newton, des Leibniz. L'emploi des coordonnées rectangulaires et des éléments du Calcul différentiel et du Calcul intégral nous est devenu tellement familier que nous serions parfois tentés d'oublier que ces admirables instruments datent seulement du XVIIe siècle ; de même que la théorie des équations aux dérivées partielles date seulement du XVIIIe siècle ; c'est en 1747 que d'Alembert obtint l'intégrale générale de l'équation des cordes vibrantes. C'est l'étude des phénomènes physiques qui suggéra les notions de continuité, de dérivée, d'intégrale, d'équation différentielle, de vecteur et de calcul vectoriel, et ces notions, par un juste retour, font partie du bagage scientifique nécessaire à tout physicien ; c'est à travers elles qu'il interprète les résultats de ses expériences. Il n'y a évidemment rien de mystérieux dans le fait que les théories mathématiques construites sur le modèle de certains phénomènes aient pu être développées et fournir le modèle d'autres phénomènes ; ce fait est néanmoins digne de retenir notre attention, car il comporte une conséquence pratique importante : si de nouveaux phénomènes physiques suggèrent des modèles mathématiques nouveaux, les mathématiciens devront s'attacher à l'étude de ces modèles nouveaux et de leurs généralisations, avec l'espoir légitime que les nouvelles théories mathématiques ainsi constituées se montreront fécondes, en fournissant à leur tour aux physiciens des formes de pensée utiles. En d'autres termes, à l'évolution de la Physique doit correspondre une évolution des Mathématiques qui, sans abandonner, bien entendu, l'étude des théories classiques et éprouvées, doivent se développer en tenant compte des résultats de l'expérience. C'est dans cet ordre d'idées que je voudrais examiner aujourd'hui l'influence que peuvent exercer les théories moléculaires sur le développement des Mathématiques.

II.

C'est sur l'hypothèse de la continuité de la matière que fut créée, à la fin du XVIIIe siècle et dans la première moitié du XIXe, ce qu'on peut appeler la Physique mathématique classique ; on peut prendre comme type des théories ainsi construites l'Hydrodynamique et l'Élasticité. En Hydrodynamique, tout liquide était considéré, par définition, comme homogène et isotrope ; il n'en était pas tout à fait de même dans l'étude de l'élasticité des corps solides : la théorie des formes cristallines avait conduit à admettre l'existence d'un réseau périodique, c'est-à-dire d'une structure discontinue ; mais la période du réseau était supposée extrêmement petite par rapport aux

éléments de matière physiquement regardés comme des éléments différentiels; la structure cristalline conduisait donc seulement à l'anisotropie, mais non à la discontinuité : les équations aux dérivées partielles de l'Élasticité, comme celles de l'Hydrodynamique, supposent la continuité du milieu étudié.

L'hypothèse atomiste, dont la tradition remonte aux philosophes grecs, n'était pas cependant abandonnée ; indépendamment de la confirmation qu'elle trouvait dans les propriétés des gaz et dans les lois de la Chimie, c'est par elle qu'on était forcé d'expliquer certains phénomènes, tels que la compressibilité des liquides ou la perméabilité des solides, malgré la continuité apparente de ces deux états de la matière; mais cette hypothèse était juxtaposée aux théories physiques basées sur la continuité; elle ne les pénétrait pas. Les progrès rapides de la Thermodynamique et des théories énergétiques contribuèrent à maintenir cette sorte de cloison étanche entre les théories physiques et l'hypothèse de l'existence des atomes, si féconde fût-elle en Chimie. Pour la plupart des physiciens d'il y a un demi-siècle, le problème de la réalité des atomes était une question métaphysique, au sens propre du terme, une question en dehors de la Physique ; il importait peu à la science que les atomes existent ou soient de simples fictions et l'on pouvait même douter si cela avait un sens d'affirmer ou de nier leur existence.

Cependant, grâce surtout aux travaux de Maxwell et à ceux de Boltzmann, l'introduction explicite des molécules dans la théorie des gaz et des dissolutions se montrait féconde; et Gibbs créait la discipline nouvelle à laquelle il a donné le nom de Mécanique statistique. Mais c'est seulement dans ces vingt dernières années que tous les physiciens ont été forcés, par l'étude des radiations nouvelles d'une part, par l'étude du mouvement brownien d'autre part, de considérer l'hypothèse moléculaire comme une hypothèse nécessaire à la Philosophie naturelle. Et, plus récemment, l'étude approfondie des lois du rayonnement a conduit à l'hypothèse inattendue de la discontinuité, de l'énergie, ou de l'action. Il n'entre pas dans mon sujet d'exposer les preuves expérimentales grâce auxquelles ces hypothèses deviennent chaque jour plus vraisemblables; les expériences les plus frappantes sont peut-être celles qui ont permis d'observer l'émission des particules α, de sorte qu'on atteint effectivement l'une des unités concrètes avec lesquelles le physicien construit le monde sensible, tout comme le monde abstrait des Mathématiques peut être construit au moyen de l'unité abstraite.

Pour formuler explicitement leurs hypothèses et en déduire des conséquences susceptibles de vérification expérimentale, les théori-

ciens de la Physique moderne utilisent des symboles mathématiques; ces symboles sont ceux qui ont été créés en partant de la notion de continuité; il n'est donc pas étonnant qu'il se rencontre parfois des difficultés, dont la plus actuelle est la contradiction au moins apparente entre l'hypothèse des quanta et l'hypothèse plus ancienne que les phénomènes sont régis par des équations différentielles. Mais ces difficultés de principe n'empêchent point le succès de ce qu'on peut appeler les théories partielles, grâce auxquelles un certain nombre de résultats expérimentaux peuvent être, malgré leur diversité apparente, déduits d'un petit nombre de formules cohérentes entre elles; l'emploi des Mathématiques dans ces théories partielles est, le plus souvent, tout à fait indépendant des bases profondes de la théorie; c'est ainsi que, pour bien des phénomènes de l'Optique physique, les formules sont les mêmes dans la théorie mécanique de Fresnel et dans la théorie électromagnétique de Maxwell; de même, les formules qu'utilisent les ingénieurs électriciens sont indépendantes de la diversité des théories sur la nature du courant.

Si j'ai tenu à signaler, bien qu'il soit en dehors de mon sujet, cet emploi de l'outil mathématique comme auxiliaire des théories physiques partielles, c'est pour prévenir tout malentendu : il ne me paraît pas douteux que, pendant longtemps encore, aussi longtemps peut-être que durera la Science humaine, ce sera sous cette forme relativement modeste que les Mathématiques rendront le plus de services aux physiciens. Ce n'est pas là une raison pour que nous nous désintéressions des théories mathématiques générales dont la Physique a fourni le modèle, qu'il s'agisse de spéculations sur les équations aux dérivées partielles suggérées par la physique du continu, ou de spéculations statistiques se rattachant à la physique du discontinu; mais il doit être bien entendu que les théories mathématiques nouvelles que peut suggérer la discontinuité des phénomènes physiques ne sauraient avoir la prétention de se substituer entièrement aux Mathématiques classiques : ce sont seulement des aspects nouveaux, auxquels il convient de faire place à côté des aspects anciens, de manière à accroître le plus possible la richesse du monde abstrait dans lequel nous cherchons des modèles propres à nous faire mieux comprendre et mieux prévoir les phénomènes concrets.

III.

C'est fréquemment une simplification en Mathématiques que de remplacer par l'infini un nombre fini très grand. C'est ainsi que le calcul des intégrales définies est souvent plus simple que celui des

formules sommatoires, et que le calcul des dérivées est généralement plus simple que celui des différences finies. De même, on a été conduit à remplacer l'étude simultanée d'un très grand nombre de fonctions d'une variable par l'étude d'une infinité continue de fonctions d'une variable, c'est-à-dire d'une fonction de deux variables. Par une généralisation plus hardie, M. Vito Volterra a été conduit à définir des fonctions qui dépendent d'autres fonctions, c'est-à-dire, dans le cas le plus simple, des fonctions de lignes, en les considérant comme des cas limites de fonctions qui dépendraient d'un très grand nombre de variables ou, si l'on veut, d'un très grand nombre de points de la ligne.

Ces généralisations diverses ont rapidement acquis droit de cité en Physique mathématique; l'emploi des équations intégrales, dont les types classiques sont l'équation de Volterra et l'équation de Fredholm, y est devenu courant. Bien que ces théories soient bien connues de tous, il n'est peut-être pas inutile d'en rappeler brièvement le principe sur un exemple particulièrement simple; nous comprendrons mieux ainsi quelle est leur signification au point de vue auquel nous nous plaçons aujourd'hui.

Considérons un système composé d'un nombre fini de points matériels, dont chacun ne peut s'écarter que très peu d'une certaine position d'équilibre stable. Les équations différentielles qui déterminent les variations de ces écarts autour des positions d'équilibre pourront, sous certaines hypothèses et à une première approximation, être regardées comme linéaires par rapport aux écarts. Si l'on introduit de plus l'hypothèse que le système satisfait à la loi de la conservation de l'énergie, les équations différentielles prennent une forme très simple et classique, d'où l'on déduit aisément que le mouvement peut être considéré comme la superposition d'un certain nombre de mouvements périodiques. Le nombre de ces mouvements périodiques élémentaires est égal au nombre des degrés de liberté; il est le triple du nombre des points matériels, si chacun de ces points peut être arbitrairement déplacé dans le voisinage de sa position d'équilibre. Les périodes des mouvements périodiques simples sont des *constantes spécifiques* du système, qui ne dépendent que de sa configuration et des hypothèses faites sur les forces mises en jeu par sa déformation, mais qui ne dépendent pas des conditions initiales : positions et vitesses; ces conditions initiales déterminent les constantes arbitraires qui figurent dans l'intégrale générale et qui sont au nombre de deux pour chaque période : l'intensité et la phase.

Supposons maintenant que le nombre des points matériels devienne très grand et identifions chacun d'eux avec une molécule d'un

corps solide, d'une barre d'acier par exemple; si les hypothèses faites continuent d'être vérifiées, et c'est ce qu'on admet dans la théorie de l'élasticité, leurs conséquences subsisteront aussi; nous aurons donc un nombre très grand de constantes caractéristiques, chacune de ces constantes définissant une période propre du système. Faisons croître jusqu'à l'infini le nombre des molécules; le système d'équations différentielles, en nombre infiniment grand, est alors remplacé par un nombre fini d'équations aux dérivées partielles, dont les propriétés fondamentales s'obtiennent par passage à la limite. En particulier, les périodes propres peuvent être déterminées et l'on constate ce fait remarquable que ces périodes peuvent être calculées avec précision et sans ambiguïté, si l'on a soin de les définir en commençant par les plus longues; il y a seulement un nombre fini de périodes supérieures à une durée donnée, mais ce nombre augmente indéfiniment lorsque la durée tend vers zéro.

Le raisonnement qui vient d'être esquissé est le type de ceux auxquels conduit la substitution de la continuité à la discontinuité; en réalité, les considérations basées sur l'existence des molécules n'y jouent qu'un rôle auxiliaire; elles mettent sur la voie de la solution, mais cette solution, une fois obtenue, vérifie rigoureusement les équations aux dérivées partielles de Lamé, équations qui peuvent se déduire aussi bien d'hypothèses énergétiques que d'hypothèses moléculaires. La théorie moléculaire a donc été un guide précieux pour l'analyste, en lui suggérant la marche à suivre pour étudier les équations du problème, mais elle est éliminée de la solution définitive. D'autre part, nous savons que cette solution ne représente qu'imparfaitement la réalité; nous obtenons une infinité de périodes propres, au lieu d'en obtenir un nombre très grand; ce nombre réel des périodes est, à la vérité, tellement grand qu'on ne doit peut-être pas avoir de scrupule à passer à la limite et à le regarder comme pratiquement infini; si l'on observe cependant que les difficultés de la théorie du rayonnement noir proviennent précisément des périodes très courtes, et que ces difficultés ne sont pas encore résolues d'une manière entièrement satisfaisante, on jugera peut-être qu'on ne saurait être trop prudent dans tout ce qui concerne ces périodes très courtes. C'est pourquoi sans doute un physicien tel que Lorentz n'a pas jugé superflus les efforts analytiques considérables qu'exige l'étude de la propagation des ondes lorsqu'on introduit explicitement les molécules. Quoi qu'il en soit d'ailleurs, même si la substitution de l'infini au fini est entièrement légitime dans certains problèmes, il peut être intéressant de se proposer, au point de vue purement mathématique, l'étude directe de fonctions ou d'équations dépendant d'un nombre de variables très grand, mais fini.

IV.

La première difficulté qui se présente, lorsqu'on veut étudier des fonctions d'un très grand nombre de variables, est la définition précise d'une telle fonction, j'entends par là une définition *individuelle*, permettant de distinguer la fonction définie de l'infinité des autres fonctions analogues. Il existe bien des propriétés générales communes à tous les êtres mathématiques d'une certaine catégorie, indépendamment de la valeur numérique des coefficients; par exemple, toute forme quadratique non définie (c'est-à-dire toujours positive) est égale à la somme des carrés d'autant de fonctions linéaires indépendantes qu'elle renferme de variables. On a parfois cherché à tirer de faits mathématiques de ce genre des conséquences physiques; je dois avouer que je ne puis me défendre de quelque méfiance à l'égard de ce genre de raisonnements; il paraît un peu singulier qu'on puisse tirer quelque chose de précis d'une notion aussi générale que celle d'une surface du second degré (disons, pour fixer les idées, d'un ellipsoïde généralisé) dans un espace à un nombre très grand de dimensions. Insistons un peu sur la difficulté qu'il y a à connaître *individuellement* un tel ellipsoïde : l'équation en peut être supposée réduite à une somme de carrés, par une substitution orthogonale, c'est-à-dire les axes restant rectangulaires. Un tel ellipsoïde exige donc, pour sa définition complète, la connaissance de ce qu'on peut appeler les carrés des longueurs de ses axes, c'est-à-dire d'autant de nombres positifs que l'espace considéré a de dimensions. La question de savoir si l'on peut considérer comme *donnés* autant de nombres, alors que la vie d'un homme ne suffirait pas à en énumérer une faible partie, est une question qui n'est pas sans analogie avec celle de la légitimité de certains raisonnements de la théorie des ensembles, tels que celui par lequel M. Zermelo prétend prouver que le continu peut être bien ordonné, et qui supposent réalisés une infinité de choix indépendants de toute loi, et cependant déterminés d'une manière unique. Les avis peuvent différer sur la solution théorique de ces difficultés et ce n'est point ici le lieu de rouvrir cette controverse; mais, au point de vue pratique, la réponse n'est pas douteuse : il n'est pas possible d'écrire effectivement l'équation numérique d'un ellipsoïde dont les axes sont aussi nombreux que les molécules constituant 1^g d'hydrogène.

Dans quel sens est-il donc possible de parler d'un ellipsoïde numériquement déterminé, à un très grand nombre de dimensions? Le procédé le plus simple, au point de vue abstrait, pour *définir* un tel

ellipsoïde, consiste à supposer que les longueurs des axes sont égales aux valeurs d'une certaine fonction simple pour les valeurs entières de la variable; on peut les supposer tous égaux (auquel cas on dira que l'ellipsoïde se réduit à une sphère); on peut aussi supposer qu'ils ont pour valeurs les nombres entiers successifs dans leur ordre naturel, soit à partir de l'unité, soit à partir de tout autre nombre donné, ou qu'ils sont égaux aux inverses des carrés de ces nombres entiers, etc. En d'autres termes, on suppose que les longueurs des axes sont toutes déterminées par la connaissance d'une formule assez simple pour être effectivement écrite, tandis qu'il n'est pas possible d'écrire effectivement autant de nombres distincts qu'il y a d'axes.

Un autre procédé, auquel on est naturellement conduit par les analogies avec la théorie cinétique des gaz, consiste à supposer que les valeurs d'une fonction des axes telle que le carré des longueurs des axes, ou de leurs inverses, etc., ne sont pas données individuellement, mais qu'on connaît seulement la valeur moyenne de cette fonction, et la loi des répartitions des autres valeurs autour de cette moyenne. On se propose, dans ces conditions, non d'étudier les propriétés d'un ellipsoïde unique bien défini, mais seulement les propriétés les plus probables de l'ellipsoïde, sachant seulement qu'il satisfait aux conditions imposées; on peut dire aussi qu'on étudie les propriétés moyennes de l'ensemble des ellipsoïdes définis par ces conditions. Ici encore, on peut observer que l'ellipsoïde probable ou l'ellipsoïde moyen est entièrement défini par la connaissance de la valeur moyenne et de la loi des écarts; si cette loi est la loi classique des probabilités, elle renferme seulement deux constantes : si l'on était conduit à introduire une loi plus compliquée, cette loi pourrait en tout cas être explicitement écrite. Les deux procédés que nous avons indiqué sont donc équivalents au point de vue analytique; il en serait évidemment de même de tous les autres procédés qu'on pourrait imaginer, et notamment des combinaisons de ces deux-là.

En somme, une figure qui dépend d'un nombre extrêmement grand de paramètres ne peut être considérée comme numériquement déterminée que si ces paramètres sont définis au moyen de données numériques assez peu nombreuses pour nous être accessibles. C'est pour cette raison que l'étude des figures géométriques dans un espace à un nombre extrêmement grand de dimensions peut conduire à des lois générales, si l'on exclut de cette étude celles de ces figures qu'il est humainement impossible de définir individuellement.

Voici, par exemple, quelques-uns des résultats auxquels on est conduit par l'étude des ellipsoïdes. En écrivant l'équation sous la forme d'une somme de carrés, le second membre étant réduit à l'unité.

les coefficients sont égaux aux inverses des carrés des axes. Si la moyenne des carrés de ces coefficients est du même ordre de grandeur que le carré de leur moyenne, on dira que l'ellipsoïde n'est pas très irrégulier. Les modes de définition dont nous avons parlé tout à l'heure conduisent à des ellipsoïdes qui ne sont pas très irréguliers, du moment qu'on n'introduit pas systématiquement dans ces définitions des fonctions choisies exprès d'une manière compliquée. On obtient au contraire un ellipsoïde très irrégulier en égalant à une constante la force vive d'un système déformable composé d'un très grand nombre de molécules, cette force vive étant écrite sous la forme classique de la somme de la force vive de translation de la masse totale concentrée au centre de gravité, augmentée de la somme des forces vives des molécules dans leur mouvement relatif par rapport à ce centre de gravité; la grande irrégularité provient de ce que les produits de la masse totale par les trois composantes de la vitesse du centre de gravité sont extrêmement grands par rapport à tous les autres termes. Lorsqu'un ellipsoïde n'est pas très irrégulier, plusieurs de ses propriétés permettent de l'assimiler à une sphère, qu'on peut appeler la *sphère médiane;* la surface de l'ellipsoïde est comprise presque tout entière entre les surfaces des deux sphères très voisines de la *sphère médiane :* d'autre part, un point étant choisi arbitrairement sur l'ellipsoïde, il est infiniment probable que la normale en ce point passe extrêmement près du centre.

Cette étude géométrique des figures à un nombre très grand de dimensions mérite, je crois, d'être approfondie; elle met en évidence les bases abstraites des théories de Mécanique et de Physique statistiques, c'est-à-dire permet de distinguer parmi les propositions auxquelles sont conduits les physiciens, celles qui sont une conséquence des hypothèses physiques de celles qui dérivent seulement des hypothèses statistiques. Mais, indépendamment de son utilité physique, cette étude géométrique des espaces à un nombre très grand de dimensions présente un intérêt propre; c'est aux théories moléculaires que nous sommes redevables de cette branche nouvelle des Mathématiques.

V.

On peut toutefois se demander s'il est légitime de regarder comme liée à l'hypothèse moléculaire une théorie qui doit, en définitive, ne dépendre que d'un petit nombre de constantes. Dire qu'un ellipsoïde a un très grand nombre de dimensions est entièrement défini par cinq ou six constantes, c'est dire que toutes les conséquences qu'on déduira de son étude seront exprimables au moyen de ces cinq ou six

constantes. Ne peut-on supposer alors qu'il sera possible d'imaginer un mécanisme analytique permettant d'obtenir ces mêmes conséquences, exprimées au moyen des cinq ou six constantes, sans qu'il soit nécessaire de faire intervenir l'équation à un très grand nombre de termes, c'est-à-dire sans qu'il soit nécessaire d'utiliser l'hypothèse moléculaire.

Cette objection mérite qu'on s'y arrête, bien qu'elle rappelle la querelle des énergétistes et des atomistes, querelle dans laquelle les atomistes paraissent bien avoir eu le dessus. On peut y répondre tout d'abord par un argument de fait : il importe peu que nous puissions concevoir la possibilité, sans utiliser les hypothèses moléculaires, de relier entre elles les conséquences de ces hypothèses ; l'important est de savoir si cette possibilité est actuellement réalisée ou si, au contraire, ce sont des calculs basés sur les hypothèses moléculaires qui constituent le mode de déduction le plus simple, sinon l'unique : si cette dernière alternative est exacte, et il semble difficile de le nier, les hypothèses moléculaires sont donc bien actuellement nécessaires, et cela seul doit nous importer.

Sous cette forme modeste, qui réserve l'avenir, cette réponse paraît péremptoire ; mais je crois que bien des physiciens ne la jugeraient pas assez catégorique. Il faut observer cependant que la question est indépendante des preuves expérimentales de la réalité des molécules ; arriverait-on à voir par un instrument plus puissant que le microscope les molécules d'un corps solide, il n'en résulterait pas, si précieuse que fût cette connaissance, que l'on dût s'en servir pour rendre compte de la manière la plus simple des propriétés de ce corps ; c'est ainsi que la possibilité de voir isolément un microbe sous le microscope n'est pas une condition indispensable de l'atténuation des virus et de l'emploi des vaccins ; de même, dans la reproduction par la photogravure d'un tableau de maître, ce n'est pas la connaissance individuelle des points constituant le cliché qui nous intéresse [1].

Au point de vue abstrait, si l'on admet que toute théorie humaine doit s'exprimer, en dernière analyse, au moyen d'un nombre fini relativement petit de données, il semble difficile de nier la possibilité de

---

[1] Cette connaissance individuelle des points intervient dans les procédés de transmission à distance du cliché : mais ici ces points, quoique nombreux, sont cependant, en nombre fini, accessibles à notre observation. Si l'on transmet par le téléphone un morceau d'orchestre, nous savons que toutes les beautés esthétiques du morceau résultent, en définitive, de certaines vibrations qu'il serait trop long de connaître individuellement ; mais, en fait, ces vibrations élémentaires n'ont rien à voir avec l'esthétique musicale ; un excellent compositeur de musique peut en ignorer l'existence et un excellent physicien peut être un musicien détestable.

constituer entièrement la théorie sans faire intervenir d'hypothèses impliquant l'existence d'éléments dont le nombre dépasse ce que l'imagination de l'homme peut concevoir. Mais la constatation de cette possibilité abstraite ne saurait prévaloir contre l'importance des services rendus par les théories moléculaires en reliant entre eux des phénomènes en apparence sans aucun lien; aussi est-il permis de considérer ces réserves sur les possibilités de l'avenir comme une simple clause de style.

Est-il possible d'aller plus loin encore, et de supprimer même toute réserve de ce genre? Pour répondre à cette question, il faudrait examiner en détail tous les phénomènes qu'on explique au moyen des hypothèses moléculaires et chercher à se rendre compte si un nombre extrêmement grand de paramètres est véritablement nécessaire à cette explication. Parmi les phénomènes discontinus dont les lois expérimentales sont bien connues, les plus caractéristiques sont ceux des spectres en série; on sait que les positions des raies spectrales sont déterminées, avec une très grande précision, par des formules dont la première et la plus simple, due à Balmer, renferme la différence des inverses des carrés de deux nombres entiers; c'est peut-être là l'exemple le plus remarquable de l'intervention du nombre entier dans une loi naturelle; si les lois de ce genre étaient plus nombreuses et mieux connues, on serait peut-être conduit à citer l'Arithmétique et la Théorie des nombres parmi les branches des Mathématiques que l'on peut rattacher à la Physique moléculaire. Peut-on, par induction, admettre que la formule de Balmer est exacte, non seulement pour les petits nombres entiers pour lesquels la vérification expérimentale est rigoureuse, mais pour beaucoup d'autres nombres entiers plus élevés pour lesquels cette vérification est impossible? Et, s'il en est ainsi, n'est-ce pas là un des phénomènes discontinus dont l'explication exige un très grand nombre de paramètres? Il ne le semble pas : d'une part, la formule, avec l'entier variable, ne contient précisément qu'un petit nombre de constantes; d'autre part, les tentatives faites pour expliquer la présence de cet entier par des hypothèses de discontinuité physique ont conduit à placer cette discontinuité à l'intérieur de l'atome lui-même; il n'est donc pas besoin d'un nombre très grand d'atomes : il en suffit d'un seul, dont la structure ne dépend que de certains paramètres, de magnétons dans la théorie de Ritz, paramètres dont le nombre est loin d'être de l'ordre de grandeur du nombre des atomes.

Cette remarque nous conduit à envisager une autre catégorie de phénomènes, auxquels nous avons fait déjà allusion, et dans lesquels les atomes ou corpuscules sont observés individuellement; l'explication de ces phénomènes n'exige-t-elle pas les hypothèses atomiques? Il

semble difficile de le nier sans paradoxe; observons cependant que les phénomènes tels que l'émission des particules α ne sont susceptibles que d'une explication globale; il n'est pas possible de prévoir avec précision une émission déterminée, mais seulement un nombre moyen; c'est donc seulement ce nombre moyen qui existe scientifiquement; le phénomène qui consiste en l'émission d'*une* particule α ne présente pas les caractères qui permettent l'expérimentation rigoureuse : on ne sait, ni le prévoir, ni le reproduire à volonté; c'est seulement l'étude de la trajectoire *après* l'émission qui présente ces caractères; et en effet cette étude n'exige que des équations en nombre assez restreint pour qu'on puisse les inscrire toutes. Les hypothèses atomiques permettraient de prévoir chaque émission individuelle, si l'on pouvait effectivement calculer sur un nombre extrêmement grand d'équations; mais cela n'est pas possible; et, en ce qui concerne la prévision *globale*, l'hypothèse atomique n'est pas, du moins *a priori*, nécessaire.

Nous touchons ici aux frontières de la Science, puisque nous atteignons des phénomènes accessibles à notre observation et qui dépendent de causes trop nombreuses pour qu'il nous soit possible de connaître avec précision toute leur complexité. La science ne reste possible que pour les valeurs moyennes qu'on peut calculer avec précision au moyen de données accessibles à l'observation.

On a bien compris, je pense, que je ne conteste pas la légitimité et l'utilité des théories moléculaires; mes remarques de mathématicien ne sauraient atteindre la réalité physique; elles se réduisent au fond à ceci : tous les calculs qu'on pourra jamais réellement effectuer comprendront seulement un nombre assez faible d'équations effectivement écrites; si l'on écrit une équation et si l'on ajoute que l'on considère quelques milliards d'équations analogues, on ne calcule pas, en fait, sur ces équations non écrites, mais seulement sur l'équation écrite, en tenant compte peut-être du nombre des équations non écrites, nombre qui aura aussi été écrit. Toute théorie mathématique se réduit donc à un nombre relativement faible d'équations et de calculs, portant sur un nombre relativement faible de symboles et de constantes numériques; il n'est donc pas absurde *a priori* de supposer qu'on puisse imaginer un modèle physique renfermant aussi un nombre relativement faible de paramètres et conduisant aux mêmes équations. Aussi longtemps toutefois que ce modèle ne sera pas imaginé, et il ne le sera peut-être jamais, les recherches analytiques ou géométriques sur les fonctions d'un nombre très grand, mais fini, de variables, pourront présenter de l'intérêt pour les physiciens.

VI.

Nous avons déjà fait observer que c'est un procédé courant en Mathématiques de remplacer le fini très grand par l'infini. Que donne ce procédé lorsqu'on l'applique aux phénomènes physiques discontinus, dont la complexité semble liée au nombre très grand des molécules? Tels sont, par exemple, les phénomènes de mouvement brownien qu'on observe lorsque des particules très fines sont en suspension dans un liquide en apparence au repos complet. Ces phénomènes rentrent dans la catégorie de ceux dont nous parlions il y a un instant, pour lesquels une prévision statistique seule est possible.

Peut-on construire une image analytique? On a déjà fait remarquer [1] que les trajectoires observées dans le mouvement brownien suggèrent la notion des fonctions continues sans tangente. Si l'on observe ces trajectoires avec des instruments optiques de plus en plus perfectionnés, on voit, à chaque nouveau grossissement, des détails nouveaux, l'arc de courbe qu'on aurait pu tracer se trouvant remplacé par une sorte de ligne brisée dont les côtés font entre eux des angles finis; il en est ainsi jusqu'à la limite des grossissements actuellement réalisables. Si l'on admet que le mouvement est produit par les chocs des molécules contre la particule, on doit en conclure qu'on obtiendrait, avec un grossissement suffisant, la forme exacte de la trajectoire, qui se présenterait sous la forme d'une ligne brisée aux angles arrondis et qui ne serait plus sensiblement modifiée par un grossissement plus fort.

Mais il n'est pas interdit à l'analyste de reculer indéfiniment par la pensée l'obtention de cet état définitif et d'arriver ainsi à la conception d'une courbe dans laquelle les sinuosités deviennent de plus en plus fines à mesure qu'on emploie un grossissement plus fort, sans qu'on atteigne jamais les sinuosités dernières : c'est bien là l'image géométrique d'une fonction continue n'admettant pas de dérivée.

On obtient aussi une courbe de même nature, mais assez particulière pour mériter qu'on s'y arrête, lorsqu'on étudie la fonction que Boltzmann désigne par H et Gibbs par η, et qui représente, dans le cas d'un gaz, le logarithme de la probabilité d'une répartition déterminée des vitesses des molécules. Chaque rencontre entre deux molécules donne une variation brusque à cette fonction, qui se trouve ainsi représentée par une courbe en escalier, les projections horizontales des marches de l'escalier correspondant aux intervalles de temps

---

[1] JEAN PERRIN, *La Discontinuité de la matière* (*Revue du mois*, mars 1906).

qui séparent deux chocs consécutifs ; le nombre des chocs subis par une molécule étant de quelques milliards par seconde (c'est-à-dire de l'ordre de grandeur de 10^9) et le nombre des molécules de l'ordre de grandeur de 10^{22} (si l'on considère une masse de quelques grammes de gaz), le nombre *total* des chocs par seconde est de l'ordre de grandeur de 10^{31} ; tel est le nombre des marches de l'escalier se projetant sur une portion de l'axe des abscisses égale à l'unité, si la seconde est prise pour unité de temps [1]. Ce que considèrent les physiciens, c'est l'allure moyenne de la courbe : ils remplacent la courbe en escalier par une courbe plus régulière, ayant la même allure moyenne dans des intervalles de temps très petits par rapport à la seconde, mais très grands par rapport à 10^{-31} seconde.

Ces considérations diverses apportent à l'analyste des suggestions intéressantes, sur lesquelles je voudrais m'arrêter un instant.

Tout d'abord, au sujet de ces courbes continues sans dérivées dont le mouvement brownien nous a donné l'image, le passage du fini à l'infini doit-il conduire à une courbe pour laquelles *tous* les points sont des points de discontinuité, ou à une courbe qui admet une infinité de points de discontinuité, mais aussi une infinité de points de continuité? Pour bien comprendre la question, il est nécessaire de rappeler brièvement la distinction capitale entre l'infini énumérable et l'infini continu. Un ensemble infini est dit énumérable si les termes en peuvent être numérotés à l'aide des nombres entiers; tel est le cas pour l'ensemble formé par les termes d'une série simple ou multiple; on peut citer aussi comme ensemble énumérable l'ensemble des nombres rationnels. Au contraire, l'ensemble de tous les nombres compris entre 0 et 1, commensurables et incommensurables, n'est pas énumérable; on dit que cet ensemble a la puissance du continu. Si l'on définit une fonction discontinue par une série dont chaque terme admet un point de discontinuité, l'ensemble de ces points de discontinuité est énumérable comme les termes eux-mêmes. Peut-on définir une fonction qui soit totalement discontinue, c'est-à-dire dont les points de discontinuité soient tous les points d'un ensemble continu, et non pas seulement ceux d'un ensemble énumérable? Il est aisé, semble-t-il, d'imaginer une telle fonction ; telle est la fonction souvent étudiée qui est égale à 1 si x est commensurable et à x si x est incommensurable ; cette fonction est bien discontinue, tant pour les valeurs

(1) Cette discontinuité suppose, bien entendu, que l'on considère la durée d'un choc comme plus courte que l'intervalle moyen de deux chocs (dans toute la masse), hypothèse difficilement admissible. Le schéma auquel conduit cette hypothèse n'est pas moins intéressant au point de vue analytique.

commensurables que pour les valeurs incommensurables. Si l'on y regarde de plus près, on s'aperçoit que la discontinuité n'est pas de même nature en ces points; on doit observer, en effet, que les nombres commensurables occupent infiniment moins de place sur l'axe des x que les nombres incommensurables; l'ensemble de ces nombres commensurables est de mesure nulle, c'est-à-dire peut être enfermé à l'intérieur d'intervalles dont l'étendue totale est inférieure à tout nombre donné à l'avance. Pour parler un langage plus concret, si l'on choisit un nombre au hasard, la probabilité pour qu'il soit commensurable est égale à zéro [1]. On conclut de là que la fonction égale à x pour les valeurs incommensurables de la variable est, *en moyenne*, continue pour ces valeurs incommensurables quelles que soient ses valeurs pour les valeurs commensurables, c'est-à-dire que si l'on choisit, au voisinage d'une valeur incommensurable donnée, pour laquelle on étudie la continuité, une autre valeur *au hasard*, il est infiniment probable que cette valeur choisie au hasard sera, elle aussi, incommensurable; il est donc infiniment probable que la variation de la fonction sera infiniment petite en même temps que la variation de la variable.

Cette remarque permet de comprendre qu'il n'ait pas été possible de définir analytiquement une fonction pour laquelle tous les points soient effectivement des points de discontinuité totale; c'est seulement en des points déterminés d'après la définition de la fonction, et jouant un rôle particulier dans cette définition, que la fonction est effectivement discontinue en moyenne.

Le passage du fini à l'infini, lorsqu'il s'agit des discontinuités des fonctions, ne s'effectue donc pas de la manière qui est la plus usuelle en Physique mathématique classique, où la matière est supposée continue, et où l'on remplace le fini par le continu : nous sommes conduits à concevoir un procédé différent, qui paraît d'ailleurs plus en harmonie avec la conception moléculaire et qui consiste à remplacer le fini très grand par l'infini énumérable.

Voici comment se présente, à ce point de vue, la généralisation analytique des courbes telles que les courbes H. Considérons un nombre écrit sous forme de fraction décimale illimitée et imaginons que les chiffres qui suivent la virgule soient groupés en tranches successives, chaque tranche renfermant beaucoup plus de chiffres que la

---

(1) Pour se donner un nombre au hasard, on peut convenir de choisir au hasard les chiffres successifs de la fraction décimale qui lui est égale; la probabilité pour que cette fraction décimale soit limitée ou périodique est évidemment égale à zéro.

précédente. A chaque tranche nous ferons correspondre un terme d'une série, ce terme étant égal à zéro si dans la tranche correspondante le rapport du nombre des chiffres pairs au nombre des chiffres impairs est compris entre 0,4 et 0,6, tandis que si ce rapport n'est pas compris entre ces limites, le terme correspondant à la tranche est égal au terme de même rang d'une certaine série convergente a termes positifs. Il est clair que, si les longueurs des tranches successives croissent rapidement, il est infiniment probable qu'un petit nombre de tranches seulement fourniront des termes différents de zéro; par suite, la série qui correspond au nombre décimal sera limitée; cette série limitée a une certaine somme qui reste la même tant que le nombre décimal varie assez peu pour que la dernière des tranches qui fournissait un terme à la série ne soit pas modifiée; du moins, dans l'intervalle ainsi défini, il est extrêmement probable que la fonction correspondant au nombre décimal conserve cette valeur constante bien déterminée, c'est-à-dire est représentée par un trait horizontal; cependant, il y a dans cet intervalle, comme dans tout intervalle, des nombres décimaux particuliers pour lesquelles certaines tranches de rang élevé, peut-être même une infinité de telles tranches, sont irrégulières au point de vue de la distribution des chiffres pairs et des chiffres impairs; il y a donc des intervalles extrêmement petits et extrêmement rares en moyenne, mais cependant partout denses, dans lesquels la courbe s'élève au-dessus du trait horizontal qui la figure en général. En l'un de ces points, qu'on peut appeler *maxima* de la courbe, il est extrêmement probable que, si l'on prend au hasard une valeur voisine de la variable, la fonction diminue, c'est-à-dire que ce point a, en moyenne, le caractère d'un maximum en pointe.

Dans l'exemple précédent, les maxima sont représentés par des intervalles de plus en plus étroits, mais finis; on peut, en modifiant légèrement la définition, obtenir une courbe qui coïnciderait partout avec l'axe des x, sauf en des points ne remplissant aucun intervalle; il suffit de convenir que, dans la série que nous venons de définir, on remplace par zéro tout terme qui est suivi par une infinité de termes égaux a zéro; la nouvelle série ne pourra donc être différente de zéro que si les termes de la première série sont tous, à partir d'un certain rang, différents de zéro.

L'étude des modèles analytiques ainsi obtenus conduit à approfondir la théorie des fonctions de variables réelles et même à imaginer des notions nouvelles, telle que la notion de *dérivée en moyenne*, naturellement suggerée par l'exemple physique de la fonction H. Il faut d'ailleurs observer que, dans l'étude de ces fonctions, la notion d'ensemble continu se combine souvent à la notion d'ensemble énumérable;

par exemple, il est aisé de voir que l'ensemble des nombres décimaux dont tous les chiffres sont impairs présente certains des caractères de l'ensemble de tous les nombres décimaux; il a, comme on dit, la puissance du continu ([1]), mais il est cependant de mesure nulle.

On peut rattacher aussi à ces considérations la théorie des probabilités énumérables, c'est-à-dire l'étude des probabilités, dans le cas où, soit l'infinité des épreuves, soit l'infinité des cas possibles est énumérable, étude qui se place entre l'étude des probabilités dans les cas finis et l'étude des probabilités continues.

VII.

Malgré l'intérêt des problèmes relatifs aux fonctions de variable réelle, c'est la théorie des fonctions d'une variable complexe qui, depuis les immortelles découvertes de Cauchy, est véritablement le centre de l'Analyse. L'analogie entre la théorie des fonctions que Cauchy a appelées fonctions *monogènes* et qu'on appelle souvent fonctions *annlytiques* et la théorie de l'équation de Laplace que vérifient les potentiels, est certainement l'une des analogies les plus fécondes de l'Analyse. On sait tout le parti que Riemann a tiré de la théorie du potentiel et de l'intuition physique dans ses profondes recherches sur les fonctions de variable complexe.

Il est donc naturel de se demander quelles idées nouvelles peuvent apporter les théories moléculaires dans ce domaine des variables complexes. Ici encore, nous serons conduits à remplacer le nombre fini très grand par l'infini énumérable : il est facile de former des séries dont chaque terme présente un point singulier, l'ensemble des termes de la série possédant ainsi une infinité énumérable de points singuliers. Ces points singuliers peuvent être choisis, par exemple, de manière à coïncider avec tous ceux des points intérieurs à un carré dont les deux coordonnées sont rationnelles. La série la plus simple qu'on puisse ainsi former se présente sous la forme de la somme d'une série de fractions dont chacune admet un pôle unique, qui est un pôle simple. L'interprétation physique, dans le domaine réel, d'une telle série, conduit à considérer le potentiel d'un système formé d'une infinité de points isolés, la masse concentrée en chacun des points étant finie (ce qui conduit à admettre que la densité en ce point est infinie, si le point est considéré abstraitement comme un simple point

([1]) Si, dans un nombre décimal dont tous les chiffres sont impairs, on remplace respectivement ces chiffres 1, 3, 5, 7, 9 par les chiffres 0, 1, 2, 3, 4, on peut considérer le nombre comme un nombre *quelconque* écrit dans le système de base 5.

géométrique sans dimensions). On suppose, bien entendu, que la série dont les termes sont les valeurs des masses est convergente, ce qui revient à dire que la masse totale est finie, bien que concentrée en une infinité de points distincts, par exemple en tous les points dont les deux coordonnées sont des nombres rationnels. Le potentiel dont il s'agit, dans le cas du plan, est ce que l'on appelle le *potentiel logarithmique* ; on pourrait raisonner d'une manière analogue dans l'espace à trois dimensions; on aurait alors le potentiel newtonien proprement dit.

L'hypothèse que les masses attirantes sont de simples points matériels sans dimensions est difficile à accepter au point de vue physique; on est ainsi conduit à exécuter l'opération analytique consistant à disperser cette masse dans un petit cercle (ou une petite sphère) ayant le point pour centre, sans changer le potentiel à l'extérieur de ce cercle (ou de cette sphère); nous nommerons ce cercle (ou cette sphère) la *sphère d'action* du point qui coïncide avec son centre; on en choisira le rayon d'autant plus petit que la masse concentrée au centre sera elle-même plus petite; de telle sorte que, si la série formée par les masses converge avec une rapidité suffisante, on peut s'arranger de manière que les rayons des sphères d'action forment aussi une série très rapidement convergente, et que cependant la densité maximum de la masse attirante soit finie. Il est facile aussi, si l'on admet qu'on dispose arbitrairement de la répartition des masses et des densités, de s'arranger de telle manière que la distribution dans chaque sphère d'action s'annule, ainsi que ses dérivées, sur toute la surface de la sphère; la distribution de la densité est ainsi non seulement finie, mais continue dans tout l'espace.

L'hypothèse qu'on a faite sur la convergence de la série dont les termes sont les rayons des sphères d'action, entraîne la convergence de la série dont les termes sont les projections de ces sphères sur une droite quelconque; si donc on supprime dans cette série un certain nombre des premiers termes, le reste de la série peut être rendu inférieur à tout nombre fixé d'avance. On en conclut que, dans un intervalle, si petit qu'il soit, pris sur la droite sur laquelle on projette les sphères, on peut trouver une infinité de points qui appartiennent au plus à un nombre fini de telles projections, à savoir celle des sphères S qui correspondent aux premiers termes qu'on a supprimés dans la série pour en rendre le reste inférieur à l'intervalle considéré. Si l'on considère un plan perpendiculaire à la droite et passant par l'un de ces points (ce point étant choisi, ce qui est possible, distinct des projections des centres en nombre fini des sphères S dont on vient de parler), ce plan coupera au plus un nombre fini de ces sphères S, sans

passer par leurs centres, mais sera extérieur à toutes les autres sphères d'action. Il est possible de modifier la distribution de la matière à l'intérieur des sphères S en nombre fini coupées par le plan de manière à remplacer ces sphères par d'autres sphères plus petites qui ne le coupent pas, cette opération ne modifiant pas le potentiel à l'extérieur des sphères, et la densité restant finie puisque l'opération ne porte que sur un nombre limité de sphères. En résumé, il est possible de trouver un plan perpendiculaire à une droite quelconque, coupant sur cette droite un segment quelconque donné d'avance et tel qu'en tous les points de ce plan la densité soit nulle. Comme notre fonction potentielle est définie par une densité partout finie et continue, cette fonction potentielle satisfait à l'équation de Poisson, qui se réduit à l'équation de Laplace partout où la densité est nulle, c'est-à-dire en tous les points des plans que nous venons de définir. Il n'était pas inutile d'insister sur ce point, car ces plans peuvent traverser des régions de l'espace dans lesquelles les points matériels donnés sont partout denses, sont par exemple tous les points dont les coordonnées sont des nombres rationnels; on aurait pu craindre qu'il n'y eût pas de place libre entre des points en quelque sorte tellement serrés les uns contre les autres; nous venons de voir que cette crainte n'est pas justifiée : le théorème de la théorie des ensembles nécessaire et suffisant pour démontrer ce résultat d'une façon rigoureuse est le suivant : *Si sur un segment de droite on a une infinité de segments partiels* (dans l'espèce, les projections des sphères d'action) *dont la longueur totale est inférieure à la longueur du segment, il existe sur ce segment une infinité de points qui n'appartiennent à aucun des segments partiels.* Cet énoncé est à peu près évident, et aisé d'ailleurs à démontrer en toute rigueur.

Dans le cas du plan, on remplacera les sphères par des cercles et le plan perpendiculaire en un point du segment par une droite perpendiculaire; on prouve aisément qu'il y a, même dans la région où les points singuliers sont partout denses, des points en lesquels se croisent une infinité de telles droites sur lesquelles la densité est nulle; en ces points la fonction potentielle logarithmique satisfait à l'équation de Laplace à deux variables. Si l'on étudie d'une manière analogue la fonction d'une variable complexe à pôles denses dans une région, on définit dans cette région une infinité de droites de continuité, se croisant dans tous les sens, la fonction admettant des dérivées continues sur ces droites, et la dérivée ayant la même valeur dans toutes les directions en chacun des points de croisement de ces droites. Pour exprimer ce fait, nous emploierons l'expression créée par Cauchy pour désigner les fonctions admettant une dérivée indépendante de l'argu-

ment de l'accroissement de la variable; ces fonctions seront dites *monogènes;* mais elles ne sont pas *analytiques*, si l'on réserve au mot *analytique* le sens très précis qu'il possède depuis les travaux de Weierstrass.

Sans m'attarder sur les analogies physiques suggérées par l'existence de plans ne coupant pas les sphères d'action des masses attirantes, je voudrais insister un peu sur la nature des problèmes mathématiques posés par l'existence de ces fonctions monogènes non analytiques.

On sait que la propriété essentielle des fonctions analytiques est d'être déterminées dans tout leur domaine d'existence, lorsque leurs valeurs sont données dans une portion, si petite soit-elle, de ce domaine. Cette propriété est-elle une conséquence de l'analyticité, c'est-à-dire de l'existence de la série de Taylor à rayon de convergence différent de zéro, ou de la monogénéité, c'est-à-dire de l'existence de la dérivée unique? Cette question n'avait pas de sens tant qu'on pouvait confondre analyticité avec monogénéité; elle prend, au contraire, une signification très nette, du moment qu'on a pu construire des fonctions monogènes non analytiques.

Je ne puis entrer aujourd'hui dans le détail des déductions par lesquels ce problème a été résolu; voici le résultat : c'est bien la monogénéité qui est le caractère essentiel auquel est due la propriété fondamentale des fonctions analytiques; cette propriété fondamentale subsiste pour les fonctions monogènes non analytiques du moment qu'on précise nettement la nature des domaines dans lesquels ces fonctions sont considérées. J'ai proposé d'appeler les domaines satisfaisant à ces conditions précises des *domaines de Cauchy;* un domaine de Cauchy s'obtient en retranchant d'un domaine continu des domaines d'exclusion, analogues aux sphères d'action de tout à l'heure, domaines qui peuvent être en nombre infini, mais dont la somme doit pouvoir être supposée inférieure à tout nombre donné (tout comme les sphères ou cercles d'exclusion considérés tout à l'heure, dont on peut multiplier les rayons une fois choisis par tout nombre plus petit que l'unité, quitte à faire croître la limite supérieure de la densité en même temps qu'on fait décroître les rayons d'exclusion).

La série formée par ces domaines exclus doit, bien entendu, être supposée convergente; on doit supposer de plus que sa convergence est plus rapide que celle d'une série déterminée qu'il est inutile d'écrire ici. Dans ces conditions, qui ne se rapportent qu'au domaine et non à la fonction, toute fonction qui satisfait dans le domaine de Cauchy à l'équation fondamentale de monogénéité possède la propriété essentielle de la fonction analytique : on peut la calculer dans tout son domaine d'existence par la connaissance de ses dérivées en un point

(l'existence de la dérivée première entraîne l'existence de toutes les dérivées, du moins dans un certain domaine qui fait partie du domaine de Cauchy) et ce mode de calcul entraîne la conséquence que, si la fonction monogène est nulle sur un arc si petit qu'il soit, elle est nulle en tout point du domaine de Cauchy ; deux fonctions ne peuvent donc coïncider sur un arc sans coïncider dans tout leur domaine d'existence, au sens généralisé.

Je ne puis développer les conséquences de ces résultats au point de vue de la Théorie des fonctions ; mais je voudrais, en terminant, vous soumettre quelques réflexions qu'ils suggèrent sur les relations entre la continuité mathématique et la continuité physique (¹).

VIII.

La plupart des équations par lesquelles on traduit les phénomènes physiques ont certaines propriétés de continuité : les solutions varient d'une manière continue. Cette propriété n'est pas d'ailleurs absolument générale, et il peut se faire que les théories des quanta d'émission ou d'absorption conduisent à attacher plus d'importance qu'on ne l'a fait jusqu'ici aux cas d'exception ; mais je ne veux pas aborder aujourd'hui cette discussion : je m'en tiens à la propriété générale, vérifiée dans un très grand nombre de cas.

Quand on cherche à interpréter cette propriété dans la théorie du potentiel et des fonctions monogènes, on devrait s'attendre, si l'on se borne pour simplifier aux fonctions réelles d'une seule variable, à trouver une sorte de passage continu entre celles de ces fonctions qui sont analytiques au sens de Weierstrass et celles qui sont entièrement discontinues. Or, c'est ce qui n'a pas lieu lorsqu'on ne considère pas les fonctions monogènes non analytiques ; du moment qu'une fonction cesse d'être analytique, elle ne possède plus aucune des propriétés essentielles des fonctions analytiques ; la discontinuité est brusque. Les nouvelles fonctions monogènes permettent de définir des fonctions de variables réelles qu'on peut dénommer *quasi-analytiques* et qui constituent en quelque sorte une zone de transition entre les fonctions analytiques classiques et les fonctions qui ne sont pas déterminées par la connaissance de leurs dérivées en un point. Cette zone de transition mérite d'être étudiée ; c'est souvent l'étude des formes hybrides qui

---

(¹) Pour plus de détails sur les problèmes mathématiques signalés dans ce paragraphe et le précédent, on pourra se reporter aux publications suivantes : *Leçons sur la théorie des fonctions* (Gauthier-Villars, 1898, deuxième édition, 1914). Définition.

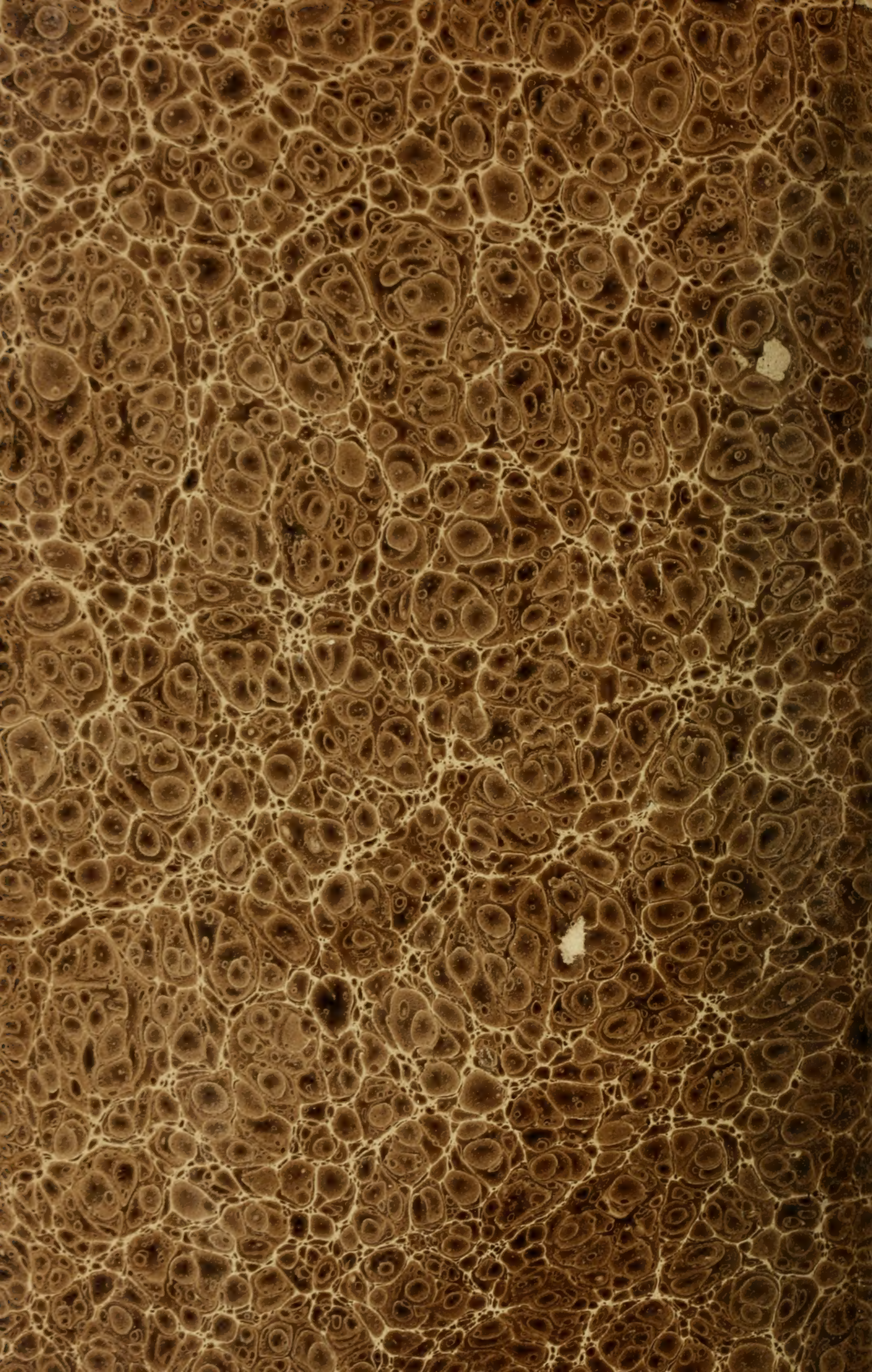
renseigne le mieux sur certaines propriétés des espèces nettement tranchées.

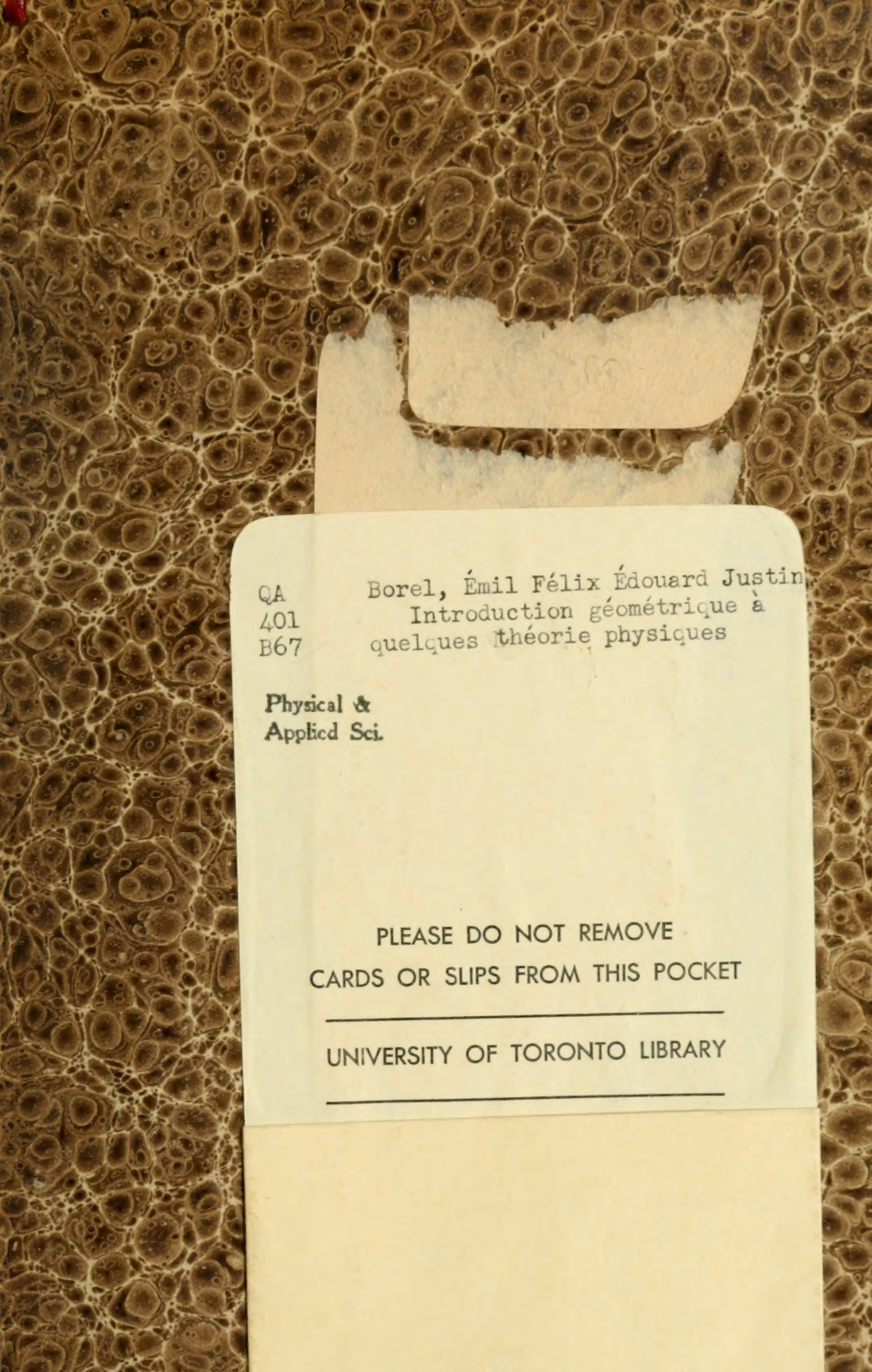
On voit que les points de contact entre la Physique moléculaire et les Mathématiques sont nombreux ; je n'ai pu indiquer que rapidement les principaux d'entre eux. Il n'est pas de ma compétence de me demander si les physiciens pourront tirer un profit immédiat de ces analogies ; mais je suis convaincu que les mathématiciens ne peuvent que gagner à les approfondir. C'est toujours au contact de la Nature que l'Analyse mathématique s'est renouvelée ; ce n'est que grâce à ce contact permanent qu'elle a pu échapper au danger de devenir un pur symbolisme, tournant en rond sur lui-même ; c'est grâce à la Physique moléculaire que les spéculations sur le discontinu prendront leur signification complète et se développeront dans une voie vraiment féconde. Et, à défaut d'applications précises impossibles à prévoir, il est assez vraisemblable que les habitudes d'esprit créées par ces études ne seront pas inutiles à ceux qui voudront entreprendre la tâche qui s'imposera bientôt de créer une Analyse appropriée aux recherches théoriques sur la Physique du discontinu.

FIN.

TABLE DES MATIÈRES.

PARIS — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,
52339 Quai des Grands-Augustins, 55.





QA
401
B67
Borel, Émil Félix Édouard Justin
Introduction géométrique à
quelques théorie physiques
Physical &
Applied Sci.
PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET
UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY

